Intégration et Probabilités – TD 1
Espaces mesurés

Quelques exercices pour bien démarrer...

Exercice 1 [Opérations sur les tribus]. Soit $\mathcal{F}$ une tribu de Ω et B un élément de $\mathcal{F}$. Montrer que la classe de parties de Ω définie par $\{A \cap B,\ A \in \mathcal{F}\}$ est une tribu de B – on l'appelle tribu trace de $\mathcal{F}$ sur B.

Montrons maintenant que la réunion croissante de tribus n'est pas forcément une tribu. Soit $\Omega = \mathbb{N}$. Pour tout entier naturel n, on pose $\mathcal{F}_n = \sigma(\{0\}, \ldots, \{n-1\})$. En considérant $2\mathbb{N}$, montrer que $\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$ n'est pas une tribu.

Exercice 2. On considère un ensemble E, et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles de E. Si $A \subseteq E$, on note $\mathbb{I}_A$ sa fonction caractéristique.

(1) Que désignent “avec des mots” les ensembles suivants,
$$\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k\ , \qquad \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k\ ?$$
Le premier est noté $\liminf_n A_n$, le second $\limsup_n A_n$. Interpréter. Relier les fonctions caractéristiques $\mathbb{I}_{\liminf_n A_n}$,$\mathbb{I}_{\limsup_n A_n}$ aux fonctions $\mathbb{I}_{A_n}$, $n \geq 1$.

(2) On suppose que $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré (μ est une mesure positive). Montrer que
$$\mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n)\ ,$$
et que si $\mu(\cup_{n\geq 1}A_n) < \infty$, alors
$$\mu(\limsup_n A_n) \geq \limsup_n \mu(A_n)\ .$$

(3) **Lemme de Borel-Cantelli :** Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.
Si $\sum_{n\geq 1}\mu(A_n) < \infty$, montrer que $\mu(\limsup_n A_n) = 0$.

(4) Application. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour presque-tout $x \in [0,1]$ (i.e., pour la mesure de Lebesgue λ), il existe un nombre fini de rationnels p/q avec p et q premiers entre eux tels que $|x - p/q| < 1/q^{2+\varepsilon}$ (donc presque tout x est “mal approchable par des rationnels à l'ordre $2+\varepsilon$”). Question subsidiaire : donner des points pour lesquels ceci est vérifié, et d'autres où ça ne l'est pas.

Exercice 3. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(f_n)_n$ une suite de fonctions $E \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurables. Montrer que l'ensemble des x où $(f_n(x))_n$ admet une limite finie est mesurable (une méthode consiste à utiliser le critère de Cauchy).

Exercice 4. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, avec μ mesure positive de masse totale non nulle, et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, montrer qu'il existe un ensemble $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$ et
$$\forall x,y \in A, \quad f(x) - f(y) \in U.$$

Quelques exercices d'approfondissement

Exercice 5. Existe-t-il une tribu $\mathcal{A}$ (sur un ensemble E) qui soit infinie dénombrable? On pourra (par exemple) s'intéresser aux "atomes" de la tribu $\mathcal{A}$: pour $x \in E$ on note

$$\dot{x} = \bigcap_{A \in \mathcal{A} : x \in A} A.$$

On montrera alors que chaque élément de $\mathcal{A}$ s'écrit de façon unique comme réunion d'atomes, et que l'injection ainsi définie est en réalité une bijection lorsque $\mathcal{A}$ est dénombrable.

Exercice 6.

(1) Soit $\mathcal{B}_k$ l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}^k$. Montrer que $\mathcal{B}_{n+m}$ est égal à la tribu produit $\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_m$ pour tout m, n.

(2) Plus généralement, si X et Y sont deux espaces topologiques, admettant une base dénombrable d'ouverts, et munis des tribus boréliennes $\mathcal{B}(X)$ et $\mathcal{B}(Y)$, alors $\mathcal{B}(X \times Y) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$.

(3) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et C l'espace des fonctions réelles continues sur I, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. On note $\mathcal{C}_1$ la tribu borélienne et $\mathcal{C}_2$ la plus petite tribu rendant les applications de projection $\pi_x : f \mapsto f(x)$ mesurables pour tout $x \in I$. Comparer ces deux tribus.

Quelques exercices plus avancés

Exercice 7 [Ensembles de Cantor]. Soit $(d_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $]0,1[$, et soit $K_0 = [0,1]$. On définit une suite $(K_n)_{n\geq 0}$ de la façon suivante ; connaissant K_n, qui est une réunion d'intervalles fermés disjoints, on définit K_{n+1} en retirant dans chacun des intervalles de K_n un intervalle ouvert centré au même point, de longueur d_n fois celle de l'intervalle. On pose $K = \bigcap_{n\geq 0} K_n$.

(1) Montrer que K est un compact non dénombrable, totalement disconnecté (i.e., ses composantes connexes sont réduites à des points), sans points isolés.

(2) Calculer la mesure de Lebesgue de K. Commenter.

(3) En pensant à des ensembles de Cantor, pouvez-vous construire un chemin injectif de $[0,1]$ dans $[0,1]^2$ dont la mesure de Lebesgue n'est pas nulle?

Exercice 8. Questions[1] pour la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$:

(1) Un ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure finie est-il forcément borné?

(2) Un borélien de mesure strictement positive est-il forcément d'intérieur non vide? Un ouvert dense de $[0,1]$ a-t-il forcément une mesure 1?

(3) Construire deux compacts de $[0,1]$ homéomorphes, l'un de mesure nulle, l'autre de mesure strictement positive.

(4) Soit $0 < \varepsilon \leq 1$, construire des ouverts denses dans $[0,1]$ de mesure inférieure à ε, de mesure égale à ε.

(5) Construire un borélien A de $\mathbb{R}$ tel que pour tout intervalle ouvert borné non vide I on ait $0 < \lambda(A \cap I) < \lambda(I)$.

---

1. cet exercice requiert des résultats de l'exercice 7

Intégration et Probabilités – TD 2
Espaces mesurés – Intégrale des fonctions mesurables

Dans ce qui suit, $(E, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré. Les fonctions mesurables $f : E \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ considérées le sont par rapport à la tribu $\mathcal{A}$ et à la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ respectivement. λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Quelques exercices pour bien démarrer...

Exercice 1. Soit f une fonction intégrable sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, et $\alpha > 0$. Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} f(nx) = 0.$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction positive mesurable. On suppose que pour tous $a < b$, $\int_{]a,b[} f(x)\lambda(\mathrm{d}x) = 0$. Montrer que $f = 0$ λ-p.p. Faire de même pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable.

Exercice 3. Soit $f : E \to \mathbb{C}$ une fonction intégable. à valeurs complexes. Montrer que si $|\int_E f \mathrm{d}\mu| = \int_E |f| \mathrm{d}\mu$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, tel que $|f| = \alpha f$ μ-p.p.

Exercice 4 [Uniforme continuité de l'intégrale]. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Montrer

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \qquad \mu(A) < \delta \Longrightarrow \int_A |f| \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

En déduire que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue, alors $F : u \mapsto \int_{[0,u]} f \, \mathrm{d}\lambda$ est uniformément continue.

Quelques exercices d'approfondissement

Exercice 5 [Théorème d'Egoroff]. On suppose que $\mu(E) < \infty$. On considère une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions réelles sur E, mesurables. On suppose que $f_n \to f$ μ-p.p. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < \varepsilon$, et sur $E \setminus A$, la convergence a lieu uniformément. Indication : on pourra considérer les ensembles

$$E_{k,n} = \bigcap_{j\geq n} \left\{ |f_j - f| < 2^{-k} \right\}.$$

Que se passe-t-il si $\mu(E) = \infty$?

Exercice 6 [Lemme de Scheffé]. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions $E \to \mathbb{R}_+$ positives mesurables, convergeant μ-p.p. vers une fonction f. On suppose que

$$\int_E f_n \, \mathrm{d}\mu \to \int_E f \, \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Montrer alors $f_n \to f$ dans $\mathbb{L}^1(\mu)$. Donner un énoncé analogue pour des fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrables.

Exercice 7. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on note $N(y) \in \bar{\mathbb{R}}$ le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$. Montrer que N est une fonction mesurable.

Un exercice plus avancé

Exercice 8 [Convergence en mesure]. On suppose que μ est une mesure (positive) de masse finie – pour fixer les idées, disons que μ est une probabilité. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. On définit que la suite converge en μ-mesure (μ-probabilité) vers $f : E \to \mathbb{R}$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mu(|f - f_n| > \varepsilon) \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$

Montrer que si $f_n \to f$ μ-p.s. (ou dans $\mathbb{L}^1(\mu)$), alors $f_n \to f$ en μ-probabilité ; remarquer également que les réciproques sont fausses.

En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que si $f_n \to f$ en probabilité, alors on peut extraire une sous-suite qui converge μ-p.s. Montrer que $f_n \to f$ en probabilité si et seulement si de toute sous-suite extraite de $(f_n)_{n\geq 1}$, on peut extraire une sous-sous-suite qui converge μ-p.s. vers f.

Application : un théorème de convergence dominée un peu plus fort. Si les f_n, $n \geq 1$, sont toutes dominées par g intégrable, et si $f_n \to f$ en μ-probabilité, alors $f_n \to f$ dans $\mathbb{L}^1(\mu)$.

Remarque : la convergence en μ-probabilité est en réalité une notion topologique. Montrer que l'on peut munir l'ensemble des fonctions mesurables d'une distance pour laquelle la convergence équivaut à celle en probabilité (la convergence en probabilité est donc métrisable – on peut même proposer deux distances différentes mais équivalentes), et que l'espace métrique ainsi obtenu est complet. (Prouver, en revanche, que la convergence presque-sûre n'est pas métrisable en général.)

Intégration et Probabilités – TD 3

Régularité des mesures – Mesure et intégrale de Lebesgue – Théorèmes de convergence

Régularité des mesures et liens entre fonctions continues et mesurables

Exercice 1 [Théorème de Lusin]. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, où E est un espace topologique muni de sa tribu borélienne $\mathcal{A}$, et μ est une mesure (positive) finie et *régulière*, i.e., telle que (régularité extérieure) pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ouvert, } A \subseteq U\} \ ,$$

et (régularité intérieure) pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compact, } K \subseteq A\} \ .$$

Soit E' un espace topologique à base dénombrable d'ouverts (muni de sa tribu borélienne). Montrer qu'une fonction $f : E \to E'$ est μ-p.p. égale à une fonction borélienne si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \subseteq E$ (compact) de mesure vérifiant $\mu(K^c) < \varepsilon$ et tel que la restriction de f à $E \setminus K$ est continue.

Remarquer que l'on ne peut pas remplacer la première assertion par la simple mesurabilité de f.

Exercice 2 [Théorème de Vitali-Carathéodory]. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, avec μ positive régulière (mais non nécessairement finie). Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable, et soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe deux fonctions réelles u et v définies $E \to \mathbb{R}$, telles que $u \leq f \leq v$, avec u semi-continue supérieurement et bornée supérieurement, et v semi-continue inférieurement et bornée inférieurement, de sorte que

$$\int_{\mathbb{R}} (v - u) \, \mathrm{d}\lambda < \varepsilon \ .$$

Rappel : u (respectivement v) est dite semi-continue supérieurement (resp. semi-continue inférieurement) si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{u < \alpha\}$ (resp. $\{v > \alpha\}$) est ouvert. A titre d'exercice, vous pourrez prouver également que toute fonction semi-continue, inférieurement ou supérieurement, est mesurable. Exemples : la fonction caractéristique d'un ensemble ouvert est semi-continue inférieurement. La fonction caractéristique d'un ensemble fermé est semi-continue supérieurement. Notez que la classe des fonctions semi-continues supérieurement (resp. inférieurement) est stable par addition.

Exercice 3 [Régularité des mesures finies sur un espace polonais]. Un espace topologique E est appelé *polonais* s'il dispose d'une métrique qui le rende complet et séparable. Montrer que toute mesure borélienne finie définie sur un espace polonais est régulière.

Du calcul, du calcul...

Exercice 4. Calculer, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, les limites quand $n \to \infty$ de

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha - 1} \, \mathrm{d}x \quad \text{et de} \quad \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} \, \mathrm{d}x \ .$$

Exercice 5. Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer que

$$\sum_{n\geq 0} \int_E |f_n| \mathrm{d}\mu < \infty \quad \text{implique} \quad \sum_{n\geq 0} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_E \left(\sum_{n\geq 0} f_n \right) \mathrm{d}\mu,$$

puis calculer

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} \,\mathrm{d}x \ .$$

Exercice 6. Soit (a_n) une suite quelconque de réels et (α_n) une suite de réels strictement positifs. Montrer que si

$$\sum_{n\geq 0} \sqrt{\alpha_n} < +\infty \ ,$$

alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\alpha_n}{|x - a_n|} < +\infty \ ,$$

et même, à y bien regarder,

$$\sum_{n\geq 0} \sqrt{\frac{\alpha_n}{|x - a_n|}} < +\infty \ .$$

Exercice 7. Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-intégrable. Etudier les fonctions

$$F : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^1 \sqrt{\varphi(x)^2 + t} \,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad G : t \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^1 |\varphi(x) - t| \,\mathrm{d}x \ .$$

Exercice 8. En dérivant sous le signe somme, calculer la transformée de Fourier de la densité gaussienne $f : x \mapsto e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$.
Rappel :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi} \ .$$

Mesure et intégrale de Lebesgue

Exercice 9. Rappeler pourquoi, pour qu'une partie E de $\mathbb{R}$ soit Lebesgue-mesurable, il faut et il suffit qu'il existe deux ensembles disjoints A et N, tous deux *boréliens*, N étant de mesure nulle, tels que $A \subseteq E \subseteq A \cup N$.

Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est Lebesgue-mesurable, montrer qu'il existe deux fonctions boréliennes f et h à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $f = h$ presque-partout, et pour *tout* $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x) < +\infty$.

Exercice 10. Montrer que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ bornée est Riemann-intégrable si et seulement si l'ensemble D des points de discontinuité de f est de mesure de Lebesgue nulle. A cet effet,

(1) on appelle oscillation de f en $x \in [0,1]$ la quantité

$$\omega(f,x) = \lim_{h\to 0,\ h>0} \sup\{|f(u) - f(v)| : |u - x| < h,\ |v - x| < h\} \ ;$$

montrer que f est continue en x si et seulement si son oscillation est nulle en x ;

(2) soit I un intervalle compact de $[0,1]$; si $\omega(f, \cdot\,) < \varepsilon$ sur I, montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $|u - v| < a$ implique $[f(u) - f(v)] < \varepsilon$ sur I ;

(3) on note D_ε l'ensemble des points de $[0,1]$ où l'oscillation est supérieure ou égale à ε ; montrer que D_ε est un compact (en prouvant que son complémentaire est ouvert) ;

(4) conclure à l'équivalence proposée.

La fonction $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$ est-elle Riemann-intégrable, Lebesgue-intégrable?

Exercice 11 [Ensembles non mesurables]. Voici une construction proposée par Vitali en 1905. Une autre méthode d'obtention d'ensembles non-Lebesgue mesurables de $\mathbb{R}$ est due à Bernstein (1908). Voir à ce propos J.C. Oxtoby, *Measure and Category*, chapitre 5. Quant à prouver qu'il existe des ensembles Lebesgue-mesurables non boréliens, une première référence est W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, chapitre 2 – l'auteur y propose un argument de cardinalité.

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, de mesure totale finie non nulle. On suppose qu'il existe une application mesurable bijective T, à réciproque mesurable, et qui conserve la mesure au sens où $T \circ \mu = \mu$, c'est-à-dire :

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \ \mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)\ .$$

On suppose de plus que T n'a pas de point périodique, soit, si $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in E$ sont tels que $T^n(x) = x$, alors $n = 0$. Pour chaque x, on considère l'orbite $\mathcal{O}(x) = \{T^n(x),\ n \in \mathbb{Z}\}$. Par l'axiome du choix, on construit un ensemble A choisissant un unique élément dans chaque $\mathcal{O}(x)$, $x \in E$.

(1) Montrer que A n'est pas mesurable.

(2) En particulier, construire un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui n'est pas mesurable pour la mesure de Lebesgue.

(3) En déduire qu'il n'existe pas de mesure μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ invariante par translation, donnant une mesure finie mais non nulle à $[0,1]$.

Un exercice plus avancé

Exercice 12 [Fonctions réelles additives]. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additive, i.e., telle que pour tous x, $y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x)+f(y)$. On se propose de montrer que si f est mesurable, alors elle est linéaire, i.e. il existe un $a \in \mathbb{R}$ tel que pour *tout* x, $f(x) = ax$ (et non seulement pour presque tout x). On propose le schéma de preuve suivant :

(1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = rf(x)$.

(2) Montrer que si le graphe de f n'est pas dense dans le plan, alors f est linéaire.

(3) Soit A un borélien de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue $\lambda(A) > 0$. Montrer que l'ensemble

$$A - A = \{x - y : x,y \in A\}$$

contient un intervalle ouvert centré en 0.

(4) Montrer que si f est mesurable, alors elle est bornée sur un voisinage de 0. Conclure.

En déduire la forme des fonctions multiplicatives (vérifiant $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tout $x,y \in \mathbb{R}$) qui sont strictement positives mesurables.

Question subsidiaire : construire des fonctions f additives non linéaires.

Intégration et Probabilités – TD 4
Théorèmes de convergence – Espaces $\mathbb{L}^0$ et $\mathbb{L}^1$

Exercice 1. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{A}$ et $f \in \mathbb{L}^1(\mu)$. On suppose que

$$\int_E |\mathbb{I}_{A_n} - f| \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \; .$$

Montrer que $|f| \leq 2$ μ-p.p., puis qu'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $f = \mathbb{I}_A$. Montrer ensuite que si $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n \Delta A) < \infty$, alors $\mathbb{I}_{A_n} \to \mathbb{I}_A$ μ-p.p.

Exercice 2 [Réciproque au théorème de convergence dominée]. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite convergente de fonctions de $\mathbb{L}^1(\mu)$: il existe $f \in \mathbb{L}^1(\mu)$ telle que $\|f_n - f\|_1 \to 0$. Montrer qu'il existe une suite extraite $(f_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ convergeant μ-p.p. vers f et telle qu'il existe $h \in \mathbb{L}^1(\mu)$ avec, μ-p.p.,

$$\sup_{n\geq 1} \left| f_{\phi(n)} \right| \leq h \; .$$

Indication : définir $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ croissante de sorte que pour tout $n \geq 1$,

$$\left\| f_{\phi(n+1)} - f_{\phi(n)} \right\| \leq \frac{1}{2^n} \; ,$$

et considérer la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} \left| f_{\phi(k+1)} - f_{\phi(k)} \right| \; .$$

Exercice 3 [Convergence en mesure]. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que μ est une mesure (positive) de masse *finie* – pour fixer les idées, disons que μ est une probabilité. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. On définit que la suite converge en μ-mesure (μ-probabilité) vers $f : E \to \mathbb{R}$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mu(|f - f_n| > \varepsilon) \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$

(1) Montrer que $f_n \to f$ μ-p.s. équivaut à la convergence vers 0 de $\sup_{k\geq n} |f_k - f|$ μ-probabilité (et donc, en particulier, $f_n \to f$ μ-p.s implique que f_n converge vers f en μ-probabilité) ; si $f_n \to f$ dans $\mathbb{L}^1(\mu)$, alors $f_n \to f$ également en μ-probabilité ; remarquer également que les réciproques des deux implications sont fausses.

(2) En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que si $f_n \to f$ en probabilité, alors on peut extraire une sous-suite qui converge μ-p.s. Montrer que $f_n \to f$ en probabilité si et seulement si de toute sous-suite extraite de $(f_n)_{n\geq 1}$, on peut extraire une sous-sous-suite qui converge μ-p.s. vers f.

(3) Application : *un théorème de convergence dominée un peu plus fort.* Si les f_n, $n \geq 1$, sont toutes dominées par g intégrable, et si $f_n \to f$ en μ-probabilité, alors $f_n \to f$ dans $\mathbb{L}^1(\mu)$.

(4) La convergence en μ-probabilité est en réalité une notion topologique. Montrer en effet que l'on peut munir l'ensemble $\mathbb{L}^0(\mu)$ des fonctions mesurables (quotientées par la relation d'égalité μ-p.p.) des deux distances équivalentes suivantes,

$$d(f,g) = \int_E \min(1, |f-g|)\,\mathrm{d}\mu \quad \text{ou} \quad \delta(f,g) = \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid \mu\{|f-g| > \varepsilon\} \leq \varepsilon\} ,$$

pour lesquelles la convergence équivaut à celle en probabilité (la convergence en probabilité est donc métrisable).

(5) Montrer que l'espace métrique $(\mathbb{L}^0(\mu), d)$ ainsi obtenu est complet (on utilisera un raisonnement similaire à celui de la solution de l'exercice 2). Prouver, en revanche, que la convergence presque-sûre n'est pas métrisable en général.

Exercice 4 [Uniforme intégrabilité]. Soit μ une mesure finie (disons, de probabilité) sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$. Un sous-ensemble $\mathcal{H}$ de $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ est dit équi-intégrable (ou uniformément intégrable) si

$$\lim_{x\to+\infty} \sup_{h\in\mathcal{H}} \int_{\{|h|\geq x\}} |h|\,\mathrm{d}\mu = 0 .$$

(1) Montrer qu'une partie finie de $\mathbb{L}^1(\mu)$ est équiintégrable, qu'une famille bornée par $f \in \mathbb{L}^1(\mu)$ est uniformément intégrable, et même que, si $\mathcal{H}$ est uniformément intégrable, alors

$$\mathcal{E}_{\mathcal{H}} = \left\{\phi \in \mathbb{L}^1(\mu) : \exists h \in \mathcal{H},\ |\phi| \leq |h|\right\}$$

est également uniformément intégrable.

(2) Prouver que $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{L}^1(\mu)$ est uniformément intégrable si et seulement c'est une partie bornée de $\mathbb{L}^1(\mu)$ vérifiant

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall A \in \mathcal{A}, \qquad \mu(A) < \delta \Longrightarrow \sup_{h\in\mathcal{H}} \mu\left[|h|\,\mathbb{I}_A\right] < \varepsilon .$$

Montrer également qu'il existe des parties bornées de $\mathbb{L}^1(\mu)$ non uniformément intégrables.

(3) Vérifier alors que si $\mathcal{H}$ est uniformément intégrable, alors il en est de même de sa fermeture dans $\mathbb{L}^1(\mu)$, et de son enveloppe convexe fermée. Si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ sont uniformément intégrables, alors il en est de même pour $\mathcal{H} + \mathcal{K}$.

(4) Montrer que toute partie compacte de $\mathbb{L}^1(\mu)$ est equi-intégrable. En particulier, si $(f_n)_{n\geq1}$ est une suite convergente dans $\mathbb{L}^1(\mu)$, alors $\{f_n,\ n \geq 1\}$ est uniformément intégrable.

(5) Prouver le critère de de la Vallée-Poussin : $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{L}^1(\mu)$ est uniformément intégrable si et seulement s'il existe $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ convexe croissante, avec

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{G(x)}{x} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \sup_{h\in\mathcal{H}} \mu\left[G(|h|)\right] < +\infty .$$

En déduire que les parties bornées $\mathcal{H}$ de $\mathbb{L}^p(\mu)$, $p > 1$, sont uniformément intégrables, et même que pour tout $0 < q < p$, $\{|h|^q,\ h \in \mathcal{H}\}$ est uniformément intégrable.

(6) Montrer que l'assertion qui suit est une amélioration du théorème de convergence dominée, et la prouver : sur $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{L}^1(\mu)$ uniformément intégrable, les traces des topologies de $\mathbb{L}^0(\mu)$ (voir exercice 3) et $\mathbb{L}^1(\mu)$ coïncident.

(7) Prouver une variante du lemme de Scheffé : soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables positives intégrables, convergeant en probabilité vers $f \in \mathbb{L}^1(\mu)$. Alors $f_n \to f$ dans $\mathbb{L}^1(\mu)$ si et seulement si $\mu[f_n] \to \mu[f]$.

(8) En déduire que pour $p > 0$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ suite de fonctions mesurables réelles ayant un moment d'ordre p, convergeant en μ-probabilité vers f, on a équivalence entre les trois assertions suivantes :

(i) $\{|f_n|^p\,,\, n \in \mathbb{N}\}$ est uniformément intégrable ;

(ii) $f_n \to f$ dans $\mathbb{L}^p(\mu)$;

(iii) $\mu[|f_n|^p] \to \mu[|f|^p] < +\infty$.

Intégration et Probabilités – TD 5
Espaces $\mathbb{L}^p$

Exercice 1. Soit (f_n) une suite qui converge dans $L^p(\mu)$, $1 < p < +\infty$ vers f. On suppose que (f_n) converge également μ-p.p. vers g. Montrer que $f = g$ μ-p.p.

Exercice 2. Soient f et g deux fonctions mesurables positives sur un espace $(E, \mathcal{A}, \mu)$, qui vérifient $fg \geq 1$. Montrer que $\int_E f \,\mathrm{d}\mu \int_E g \,\mathrm{d}\mu \geq \mu(E)^2$. Que dire d'un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$ sur lequel on peut trouver une fonction $f > 0$ mesurable, telle que f et $1/f$ sont intégrables ?

Exercice 3. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions positives dans l'espace $L^p(\mu)$, $1 \leq p < +\infty$. Montrer que si $f_n \to f$ dans L^p, alors pour tout $r \in [1,p]$, f_n^r converge vers f^r dans $L^{p/r}$. Indication : si $x, y \geq 0$ et $r \geq 1$, alors $|x^r - y^r| \leq r|x-y|(x+y)^{r-1}$.

Exercice 4. Soit f une fonction mesurable sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$, avec $\|f\|_\infty > 0$. Pour $0 < p < +\infty$, on pose

$$\varphi(p) = \int_E |f|^p \,\mathrm{d}\mu$$

et $I = \{p \in \mathbb{R}_+^* : \varphi(p) < +\infty\}$.

(1) Montrer que I est un intervalle. Est-il nécessairement fermé ? En considérant la fonction $f(x) = x^{-1}(1 + |\ln x|)^{-2}$, montrer que I n'est pas nécessairement ouvert non plus.

(2) Montrer que $\ln \circ \varphi$ est convexe (en particulier, φ est convexe) et que φ est continue sur I.

(3) Montrer que si $p \leq r \leq q$ sont tous trois dans I, alors $\varphi(r)^{1/r} \leq \max(\varphi(p)^{1/p}, \varphi(q)^{1/q})$, et ainsi, $\mathbb{L}^p(\mu) \cap \mathbb{L}^q(\mu) \subset \mathbb{L}^r(\mu)$.

Exercice 5. Soit

$$\chi_n = \frac{1}{2n} \mathbb{I}_{[-n,\,n]}\ ;$$

étudier sa limite dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ et dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ quand $n \to +\infty$. Utiliser cette suite de fonctions pour montrer que

$$F = \left\{ f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} f(x) \,\mathrm{d}x = 0 \right\}$$

est dense dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de la densité de

$$F' = \left\{ f \in \mathbb{L}^1([0,1]) \cap \mathbb{L}^2([0,1]) : \int_{[0,1]} f(x) \,\mathrm{d}x = 0 \right\}$$

dans $\mathbb{L}^2([0,1])$?

Soit $E = \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2$. Vérifier que $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach. Soit $f_1 \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$ et $f_2 \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$; on note $f = f_1 + f_2$: montrer que

$$u \in E \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\, u(x) \,\mathrm{d}x$$

est une forme linéaire sur E.

Exercice 6. Pour $h \in \mathbb{R}$, on note τ_h l'opérateur de translation défini par $\tau_h f = f(\cdot - h)$ pour f borélienne sur $\mathbb{R}$. On considère alors $p \in [1, +\infty]$. Remarquer que τ_h est une isométrie de $L^p(\mathbb{R})$. Si $p < \infty$, montrer, en commençant par des fonctions continues à support compact, que si $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors
$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0 \ .$$
En déduire que si $\lambda(A) > 0$, alors l'ensemble $A - A = \{x - y : x, y \in A\}$ contient un voisinage de 0.

Exercice 7 [Inégalité de Hardy]. Soit f une fonction positive continue sur $\mathbb{R}_+^*$, à support compact. On pose, pour $x > 0$,
$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t \ .$$

Soit $p \in]1, +\infty[$. Justifier que $F \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$, et que
$$\int_{\mathbb{R}_+} F(x)^p \, \mathrm{d}x = \frac{p}{p-1} \int_{\mathbb{R}_+} f(x) F(x)^{p-1} \, \mathrm{d}x \ .$$
(On pourra utiliser le fait que $F^p = FF^{p-1} = (f - xF')F^{p-1}$.) En déduire (c'est l'inégalité de Hardy) que
$$||F||_p \leq \frac{p}{p-1} ||f||_p \ .$$

Montrer que F reste bien définie et que cette dernière inégalité reste valable pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$.

Intégration et Probabilités – TD 6
Espaces $\mathbb{L}^p$ — Mesures-produits – Théorèmes de Fubini

1. Quelques exercices encore sur les espaces $\mathbb{L}^p$

Exercice 1. Soit f mesurable sur un espace $(E, \mathcal{A}, \mu)$. On suppose que $f \in \mathbb{L}^{p_0}(\mu)$ pour au moins un $p_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

(1)
$$\lim_{p\to\infty} ||f||_p = ||f||_\infty \ ,$$
en remarquant qu'il est toujours vrai que
$$\liminf_{p\to\infty} ||f||_p \geq ||f||_\infty \ ,$$
et que seule l'inégalité inverse nécessite une hypothèse en plus;

(2) et que si en plus μ est de probabilité, alors
$$\lim_{p\to 0} ||f||_p = \exp\left(\mu[\ln |f|]\right) \ ;$$
à cet effet, on déterminera d'abord avec soin les limites de
$$||f||_p^p \qquad \text{et} \qquad \mu\left[\frac{|f|^p - 1}{p}\right] \ .$$

Exercice 2. Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$. On pose
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \ .$$
Montrer que F est bien définie et que si q est l'exposant conjugué de p, alors
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x+h) - F(x)|}{|h|^{1/q}} = 0 \ .$$

En déduire que si g est une fonction sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable et que $g' \in L^p$ pour un $p \in [1, +\infty]$, alors
$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \ .$$

2. Mesures-produits

Exercice 3. Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, on note $\mathcal{A}^\mu$ la complétion de la tribu $\mathcal{A}$ pour μ. Soit alors $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ-finis. Montrer que
$$\mathcal{A}_1^{\mu_1} \otimes \mathcal{A}_2^{\mu_2} \subseteq (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)^{\mu_1\otimes\mu_2} \ ,$$
et que cette inclusion peut être stricte (penser à la mesure de Lebesgue).

Question supplémentaire (plus difficile) : Montrer également que si f est une application $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)^{\mu_1\otimes\mu_2}$-mesurable, alors pour μ_2 presque tout y, $f(\cdot, y)$ est $\mathcal{A}_1^{\mu_1}$-mesurable.

3. Théorème de Fubini–Tonelli, petits exercices de mise en jambes

Exercice 4. Soit f une fonction positive sommable sur un espace $(E, \mathcal{A}, \mu)$ et g une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, avec $g(0) = 0$. Montrer que

$$\mu\,[g \circ f] = \int_0^{+\infty} g'(t)\mu\{f \geq t\}\,\mathrm{d}t \ .$$

On retiendra en particulier que

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int_0^{+\infty} \mu\{f \geq t\}\,\mathrm{d}t \ .$$

Exercice 5. En calculant de deux façons différentes l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+y)(1+x^2y)} \ ,$$

trouver la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \ .$$

Exercice 6. Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ borélienne positive. Calculer la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ de $\{(x,y) : 0 \leq y \leq f(x)\}$ et du graphe de f (défini par $\{(x,y) : y = f(x)\}$). En déduire que pour presque tout y, $\{f = y\}$ est de mesure nulle.

Exercice 7. Soient f et g deux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotones de même sens, mesurables par rapport à une tribu $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{R}$, et μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$. On suppose de plus que f, g et fg sont dans $L^1(\mu)$. Montrer que

$$\mu\,[fg] \geq \mu\,[f]\ \mu\,[g]\,.$$

Indication : considérer $(x, y) \mapsto (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$.

Exercice 8. Pour $k \geq 1$, on note $\|\cdot\|_k$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^k$. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{||x||_k^\alpha}$$

appartient-elle à $L^p([0,1]^k)$, $p > 0$?

4. Théorèmes de Fubini, calculs atrocément passionnants

Exercice 9. Soit f la fonction définie sur $[0,1]^2$ par

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

pour $\max(x, y) > 0$, et $f(0,0) = 0$. Calculer

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y f(x,y) \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}x f(x,y)$$

et conclure.

Exercice 10. En remarquant que

$$\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \, \mathrm{d}t \ ,$$

calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x \ .$$

Intégration et Probabilités – TD 7
Convolution dans les espaces $\mathbb{L}^p$

Bonnes vacances et joyeuses fêtes de fin d'année ! G.S.

Exercice 1. Montrer que $(\mathbb{L}^1(\mathbb{R}), +, \star)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de Banach, commutative et associative, mais non unitaire. A cet effet, notez que $(\mathbb{L}^1(\mathbb{R}), +)$ est un $\mathbb{R}$-module, et qu'il suffit de montrer que $\star$ est bilinéaire pour avoir la structure d'algèbre. Prouvez ensuite que $\star$ est commutative, associative, mais qu'il n'existe aucun élément neutre pour $\star$ dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Enfin, la propriété dite de Banach est que $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$, mais cela, vous le savez.

Exercice 2. Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ et g une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f \star g$ est définie sur *tout* $\mathbb{R}$, et qu'elle est continue et bornée.

En déduire que si g est en fait une fonction bornée, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée g' également bornée, alors $f \star g$ est définie sur *tout* $\mathbb{R}$, et est bornée, de classe C^1, de dérivée également bornée.

Exercice 3. Soit $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R})$, où p et q sont des exposants conjugués vérifiant $1 < p, q < \infty$. Alors[2] $f \star g$ est définie sur *tout* $\mathbb{R}$, est uniformément continue, et vérifie

$$\|f \star g\|_\infty \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \ .$$

Montrer qu'en outre $f \star g$ est de limite nulle aux infinis.

Exercice 4 [Critère de compacité dans $\mathbb{L}^p$]. On rappelle[3] l'énoncé du théorème d'Ascoli : soit X et Y deux espaces métriques compacts, et A une partie de l'ensemble $C(X,Y)$ des fonctions continues $X \to Y$ (muni de la topologie de la convergence uniforme). Dire que A est équicontinue, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta > 0, \quad \big(d(x,x') < \delta \ \Rightarrow \ \forall f \in A,\, d(f(x), f(x')) < \varepsilon\big) \ ,$$

équivaut à dire que A est relativement compact dans $C(X,Y)$, i.e. sa fermeture $\bar{A}$ est compacte.

Nous allons prouver la version $\mathbb{L}^p$ suivante du théorème d'Ascoli. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, et un ouvert $\omega \subset\subset \Omega$ (i.e., l'adhérence de ω vérifie $\bar{\omega} \subset \Omega$ et $\bar{\omega}$ est compact). Le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov assure alors que si $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{L}^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$, tel que

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta > 0,\, \delta < d(\omega, \Omega^c), \quad \Big(|h| < \delta \ \Rightarrow \ \forall f \in \mathcal{F},\ \|\tau_h f - f\|_{\mathbb{L}^p(\omega)} < \varepsilon\Big) \ ,$$

alors $\mathcal{F}_{|\omega}$ est relativement compact dans $\mathbb{L}^p(\omega)$.

A cet effet, on note $(\rho_n)_{n\geq 1}$ une suite d'approximations de δ_0 (une suite dite régularisante), i.e. ρ_n est C^1 (même C^∞), de support inclus dans $[-1/n, 1/n]$ et d'intégrale 1. La suite $(n\rho(n\,\cdot))_{n\geq 1}$, construite à partir de

$$\rho : x \mapsto \rho(x) = \begin{cases} c\, e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

2. voir la proposition 5.4.2 de votre polycopié, et sa preuve
3. voir par exemple G. Choquet, *Cours de topologie*, Chapitre I, Section 23, pour une preuve

pour une constante de renormalisation c bien choisie, convient par exemple. Par ailleurs, pour simplifier les calculs, on considère $\bar{\mathcal{F}}$ l'extension par 0 des fonctions de $\mathcal{F}$ à tout $\mathbb{R}$.

(1) Montrer que pour tout n, la famille $\mathcal{H}_n = (\rho_n \star \bar{\mathcal{F}})_{|\bar{\omega}}$ est relativement compacte dans $\mathbb{L}^p(\omega)$.

(2) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\bar{f}\in\bar{\mathcal{F}}} \left\| \rho_n \star \bar{f} - \bar{f} \right\|_{\mathbb{L}^p(\omega)} = 0 \ .$$

(3) Conclure !

(4) Application : on fixe $g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ et on considère un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, borné (en norme) par M. On note $\mathcal{F} = g \star \mathcal{B}$; $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{L}^p(\mathbb{R})$. Prouver que pour tout ouvert borné $\omega \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_{|\omega}$ est relativement compact dans $\mathbb{L}^p(\omega)$.

Pour les vacances... Lisez avec profit les Sections 4 et 5 du Chapitre IV de H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, de même que les commentaires de fin de chapitre. Essayez par exemple de prouver l'inégalité de Young (qui généralise toutes toutes les inégalités sur les normes de convolution que vous avez pu voir en cours ou en TD). D'ailleurs, l'exercice 4 de ce TD est tiré de ce remarquable ouvrage.

Intégration et Probabilités – TD 8
Mesures signées, mesures complexes – Théorème de Radon-Nikodym

Le but de ce dernier TD de mesure et intégration est de s'intéresser aux relations entre l'intégration et la dérivation, dans un cadre Lebesgue. Vous savez par exemple, dans le cadre de l'intégrale de Riemann, donc aussi pour l'intégrale de Lebesgue, que

(1) toute intégrale F d'une fonction continue f est de classe C^1, et admet pour dérivée $F' = f$;

(2) et qu'une fonction f de classe C^1 est une intégrale de sa dérivée f'.

Tâchons de généraliser ces deux résultats, connus sous le nom de *théorème fondamental du calcul*, et de les exprimer sous des conditions nécessaires et suffisantes. Une bonne référence, de laquelle ce TD est tiré en grande partie, est W. Rudin, *Analyse réelle et complexe.*

Dérivée des intégrales

On notera m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1 [Fonctions maximales]. Soit une mesure borélienne complexe sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, on note $B(x,r) =]x-r, x+r[$, et on considère

$$Q_r\mu(x) = \frac{\mu(B(x,r))}{m(B(x,r))} \ .$$

Introduisons la *fonction maximale* $M\mu$ définie par

$$M\mu = \sup_{0<r<\infty} Q_r \, |\mu| \ ,$$

où $|\mu|$ est la mesure de variation totale de μ. Notant $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R})$, montrer que

(1) $M\mu$ est semi-continue inférieurement, et est donc mesurable ;

(2) pour tout $\lambda > 0$,

$$m\{M\mu > \lambda\} \leq \frac{3\,\|\mu\|}{\lambda} \ .$$

A cet effet, on notera que si un sous-ensemble W de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme l'union d'une famille finie de boules $B(x_i,r_i)$, $1 \leq i \leq N$, alors il existe un sous-ensemble $S \subset \{1,\ldots,N\}$ tel que les boules $(B(x_i,r_i), i \in S)$ sont disjointes,

$$W \subset \bigcup_{i \in S} B(x_i, 3\,r_i) \ .$$

Soit $f \in \mathbb{L}^1(m)$, et μ la mesure définie par $\mathrm{d}\mu = f \cdot \mathrm{d}m$. Que dit alors l'inégalité de la question (2) ? (Qui est $M\mu$, comment se réécrit le second membre ? C'est un simple jeu d'identification et de réécriture...)

Exercice 2 [Points de Lebesgue]. Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. On appelle *point de Lebesgue* de $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ tout point $x \in \mathbb{R}$ pour lequel

$$\frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \,\mathrm{d}m(y) \xrightarrow[r\to 0]{} 0 \ .$$

Prouver que presque tous les points de $\mathbb{R}$ sont points de Lebesgue pour f.

Exercice 3 [Dérivée des intégrales]. On définit qu'une suite $(E_n)_{n\geq 1}$ de boréliens *rétrécit convenablement* sur x s'il existe $\alpha > 0$ et une suite $(r_n)_{n\geq 1}$ de réels strictement positifs tels que $r_n \to 0$, $E_n \subset B(x,r_n)$ et $m(E_n) \geq \alpha\, m(B(x,r_n))$. Montrer que si x est un point de Lebesgue de $f \in \mathbb{L}^1(m)$, et si $(E_n)_{n\geq 1}$ rétrécit convenablement sur x, alors

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} f \,\mathrm{d}m \ .$$

En déduire la première partie du théorème fondamental du calcul :

Théorème 1. *Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. On définit une intégrale de f par*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f \,\mathrm{d}m \ , \qquad x \in \mathbb{R} \ .$$

Alors F est dérivable en tout point de Lebesgue de f (donc m-p.p.), de dérivée $F' = f$.

Intégrale des dérivées

Une fonction f à valeurs complexes, définie sur un intervalle $I = [a,b]$, est dite *absolument continue* [AC] sur I si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout n, pour toute famille d'intervalles disjoints $]\alpha_1,\beta_1[,\ldots,]\alpha_n,\beta_n[$ dans I, on ait

$$\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i) \leq \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| \leq \varepsilon \ .$$

(On notera qu'en particulier f est continue.) L'absolue continuité est la bonne condition pour compléter le théorème fondamental du calcul. Nous allons démontrer celui-ci dans le cas où f est croissante. L'extension au cas général est assez facile, et ne met pas vraiment en jeu de techniques de mesure et d'intégration – les détails sont donnés par W. Rudin, *Analyse réelle et complexe.*

Théorème 2. *Soit $I = [a,b]$ et $f : I \to \mathbb{R}$ croissante (au sens large). Alors f est* AC *si et seulement si f est presque partout dérivable sur I, de dérivée $f' \in \mathbb{L}^1(I,m)$, et vérifie, pour tout $a \leq x \leq b$,*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) \,\mathrm{d}t \ .$$

Exercice 4. Rappeler pourquoi f AC est une condition nécessaire. Il s'agit alors de montrer le sens direct de l'équivalence.

Exercice 5. A cet effet, montrer au préalable que si f est AC, alors l'image par f d'un ensemble de mesure nulle est encore de mesure nulle.

On considère alors la fonction g définie sur I par $g(x) = x + f(x)$. Montrer que l'image $g(E)$ par g de tout ensemble Lebesgue-mesurable E, est encore Lebesgue-mesurable. On définit ainsi légitimement l'application

$$\Phi : E \in \mathcal{M} \mapsto m(g(E)) \ ,$$

qui à un ensemble Lebesgue-mesurable $E \in \mathcal{M}$ inclus dans I associe $m(g(E))$. Montrer que Φ est une mesure sur les ensembles Lebesgue-mesurables, que l'on notera μ. Remarquer ensuite que μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue (au sens des mesures), et ainsi qu'il existe $h \in \mathbb{L}^1(\mathcal{M})$ telle que $\mathrm{d}\mu = h \cdot \mathrm{d}m$. Conclure en utilisant le Théorème 1.

Intégration et Probabilités – TD 9

Probabilités discrètes, lois, théorème du changement de variables, fonctions de répartition

Probabilités discrètes

Exercice 1. On dispose de r boules (numérotées), que l'on répartit dans n cases de façon uniforme indépendante, c'est-à-dire que pour chaque boule on choisit une des n cases avec la même probabilité. Donner un espace de probabilités correspondant à cette expérience.

Calculer la loi $\mu_{r,n}$ du nombre de boules tombant dans la première case. Montrer que si r et n tendent vers $+\infty$, de telle sorte que $r/n \to \lambda \in \mathbb{R}_+$, alors la loi $\mu_{r,n}$ approche la loi de Poisson d'indice λ : pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mu_{r,n}(k) \longrightarrow e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Exercice 2 [Le théorème du scrutin]. On procède au dépouillement d'un scrutin, en enlevant un par un les bulletins d'une urne, qui contient a bulletins pour le candidat A et b bulletins pour le candidat B, avec $a > b$. Quelle est la probabilité pour que, tout au long du dépouillement, le candidat A ait été toujours en tête (au sens strict) ? (On pourra se ramener au dénombrement d'une certaine famille de lignes brisées allant de (0,0) à $(a+b,a-b)$.)

Exercice 3 [Pouvoir paranormal moyen]. On considère l'expérience de divination suivante. On dispose d'un jeu de 52 cartes distinctes, d'un manipulateur et d'un devin. Le devin ne peut à aucun moment voir le jeu ou le manipulateur, et doit deviner quelle est la carte se trouvant sur le dessus du paquet. Il annonce donc une carte au hasard, et le manipulateur retourne silencieusement les cartes les unes après les autres jusqu'à tomber sur la carte annoncée par le devin. Après quoi ce dernier doit deviner la carte qui suit : il annonce une carte au hasard parmi les 51 restantes, et le manipulateur continue de retourner les cartes à partir de l'endroit où il s'était arrêté – et ainsi de suite, jusqu'à ce que tout le paquet soit retourné. Combien de fois en moyenne le devin aura-t-il à annoncer une carte qui se trouve encore dans le paquet ?

Calculs de lois et changements de variables

Théorème 3 (Théorème du changement de variables pour la mesure de Lebesgue)**.** *Soit U et D deux ouverts de $\mathbb{R}^d$, et $\varphi : U \to D$ un difféomorphisme de classe C^1. Alors, pour toute fonction borélienne $f : D \to \mathbb{R}_+$,*

$$\int_D f(x)\,\mathrm{d}x = \int_U f(\varphi(u))\,|J_\varphi(u)|\;\mathrm{d}u\ ,$$

où $J_\varphi(u) = \det(\varphi'(u))$ est le jacobien de φ en u.

Exercice 4. Si X est une variable aléatoire réelle, de loi de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, que peut-on dire de la loi de $Y = 1/X$?

Appliquer ceci à X de loi normale standard $N(0,1)$: dans ce cas, Y admet-elle encore une espérance ?

Supposons maintenant que X suive la *loi de Cauchy* $C(0,1)$, de densité par rapport à la mesure de Lebesgue

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2} \ ;$$

que peut-on dire de la loi de Y ? Questions subsidiaires : la notation $N(0,1)$ rappelle que la loi normale standard a 0 pour espérance et 1 pour variance. Pourquoi la notation $C(0,1)$ (*id est*, que serait une loi de Cauchy $C(a,b)$) ?

Exercice 5. On considère une source lumineuse ponctuelle située au point $(-1,0)$ dans le plan. Soit θ une variable aléatoire uniforme dans $]-\pi/2, \pi/2[$; on suppose que la source émet un rayon lumineux en direction de l'axe des ordonnées selon un angle θ avec l'axe des abscisses. Déterminer la loi de l'ordonnée du point d'impact du rayon avec l'axe des ordonnées.

Fonctions de répartition

Exercice 6. Si X est une variable aléatoire réelle, de loi de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, que peut-on dire de la loi de $Z_1 = |X|$ et de $Z_2 = X^2$? En particulier, préciser la densité de la loi $\chi^2(1)$, dite du *chi-deux* à un degré de liberté, et qui correspond à la loi du carré d'une loi normale standard.

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire réelle, dont on note F_X la fonction de répartition. X est intégrable si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}^+} (1 - F_X(x) + F_X(-x)) \, \mathrm{d}x < +\infty \ .$$

Dans ce cas,

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}^+} (1 - F_X(x) - F_X(-x)) \, \mathrm{d}x < +\infty \ .$$

Exercice 8 [Simulation de variables aléatoires]. Soit X une variable aléatoire réelle et F sa fonction de répartition, dont on rappelle qu'elle est définie par $F(t) = P(X \leq t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Pour $u \in]0,1[$, on définit l'*inverse généralisée* de F par

$$F^{-1}(u) = \inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq u\} \ .$$

Inverse et inverse généralisées coïncident bien dans le cas où F est bijective (strictement croissante). Montrer alors que si U est une variable aléatoire uniforme sur $]0,1[$, alors $F^{-1}(U)$ et X ont même loi.

Application : supposons que l'on dispose d'une telle v.a. uniforme U. Comment simuleriez-vous une variable aléatoire de loi de Cacuhy, de loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, ou de loi de Laplace ? On rappelle que la densité de cette dernière est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|} \ .$$

Si maintenant la loi de X est diffuse[4] (i.e. F est continue, ou encore, X ne charge aucun point), quelle est la loi de $F(X)$? Pour répondre à cette question, introduire la fonction

$$G(u) = \inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) > u\} \ .$$

Pot-pourri

Exercice 9. Déterminer la tribu $\sigma(X)$ engendrée par X dans le cas où $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $X(\omega) = \omega^2$.

Exercice 10 [A propos de queues]. On appelle queue d'une loi réelle μ la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $\mu]x, +\infty[$. Soit X une variable aléatoire réelle intégrable. Montrer que la queue de sa loi satisfait

$$\lim_{x\to\infty} xP\left[|X| > x\right] = 0 \ .$$

Soit Φ la fonction de queue de la loi normale standard. Vérifier l'inégalité, valable pour tout $x > 0$,

$$\frac{x^2}{1+x^2}\,\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}} \ \leq \Phi(x) \ \leq \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}} \wedge \frac{e^{-x^2/2}}{2} \ ,$$

et en déduire un équivalent de Φ lorsque $x \to \infty$.

4. mais sans nécessairement admettre de densité par rapport à la mesure de Lebesgue – cf. par exemple la fonction de Lebesgue

Intégration et Probabilités – TD 10
Moments des lois, fonctions caractéristiques, génératrices, et de Laplace

Définition 1. *On dit que les variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes si pour toutes fonctions mesurables $f_1,\dots,f_n$, on a*

$$\mathbb{E}\left[f_1(X_1)\dots f_n(X_n)\right] = \mathbb{E}\left[f_1(X_1)\right]\dots\mathbb{E}\left[f_n(X_n)\right] \; .$$

Une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires est indépendante si toute suite finie extraite est formée de variables indépendantes. Des événements sont indépendants si leurs indicatrices le sont.

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi μ. On définit la *fonction génératrice* de μ (ou X) par

$$G_X(r) = \mathbb{E}[r^X] = \sum_{n\geq 0} \mu(\{n\})\, r^n \; ,$$

pour $r \in [-1,1]$. Rappeler pourquoi on appelle cette fonction *génératrice*, et calculer sa valeur pour les lois suivantes :

(1) loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$,
(2) loi binômiale de paramètres (n,p), avec $n \in \mathbb{N}^*, p \in [0,1]$,
(3) loi géométrique (sur $\mathbb{N}$) de paramètre $q \in]0,1[$,
(4) loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

En déduire les espérances et variances des lois ci-dessus.

Si X est une variable aléatoire réelle de loi μ, on définit sa *fonction caractéristique* par

$$\Phi_X(t) = E[e^{i\,t\,X}] \; .$$

Calculer les fonctions caractéristiques des lois exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et uniforme sur $[0,1]$. En déduire les espérances et variances des lois ci-dessus.

Exercice 2 [Médiane d'une variable aléatoire]. Soit X un variable aléatoire réelle. On appelle médiane de X et on note $\mathrm{med}(X)$ l'ensemble des réels x tels que

$$\mathbb{P}\left[X \geq x\right] \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left[X \leq x\right] \geq \frac{1}{2} \; .$$

(1) $\mathrm{med}(X)$ est un intervalle fermé *non-vide*, dont l'intérieur n'est pas chargé par la loi de X, et

$$\mathbb{P}\left[|X| \leq a\right] > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{med}(X) \subseteq [-a,a] \; .$$

(2) Soit m une médiane de la loi de X. Si $\widetilde{X}$ est une copie[5] indépendante de X, i.e. une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé sous-jacent, de même loi que X et indépendante de X, alors, pour tous $a \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ et $r > 0$,

$$\frac{1}{2}\,\mathbb{P}\left[|X-m| \geq t\right] \leq \mathbb{P}\left[\left|X-\widetilde{X}\right| \geq t\right] \leq 2\,\mathbb{P}\left[|X-a| \geq \frac{t}{2}\right] \; ,$$

5. pourquoi peut-on toujours supposer qu'une telle copie existe ?

où m désigne l'un quelconque des éléments de $\mathrm{med}(X)$, de sorte que

$$\frac{1}{2}\,\mathbb{E}\left[|X-m|^r\right] \le \mathbb{E}\left[\left|X-\widetilde{X}\right|^r\right] \le 2^{r\vee 1}\,\mathbb{E}\left[|X-a|^r\right]\ .$$

(3) On suppose désormais X intégrable. L'application

$$x\in\mathbb{R}\mapsto D_X(x)=\mathbb{E}\left[|X-x|\right]$$

est convexe et détermine la loi de X. Elle est minimale (et constante) sur $\mathrm{med}(X)$. (Comparer à la caractérisation de la variance de X.) De plus,

$$\lim_{x\to-\infty}(D_X(x)+x)=\mathbb{E}[X]\quad\text{et}\ \lim_{x\to\infty}(D_X(x)-x)=-\mathbb{E}[X]\ .$$

Enfin, prouver que

$$|\mathrm{med}(X)-\mathbb{E}[X]|\le\sqrt{2\ \mathrm{var}(X)}\ .$$

Exercice 3 [Réciproque au lemme de Borel-Cantelli]. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires *positives* définies sur le même espace probabilisé, et telles que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0<\mathbb{E}[X_n^2]<\infty$. Alors, pour tout n, $0<\mathbb{E}[X_n]<\infty$ et

$$\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]}>0\right]\ge\limsup_{n\to\infty}\frac{(\mathbb{E}[X_n])^2}{E[X_n^2]}\ .$$

En particulier, si $(A_k)_{k\ge1}$ est une suite d'événements telle que $\sum_k\mathbb{P}[A_k]=\infty$, alors

$$\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty}A_n\right]\ge\limsup_{n\to\infty}\frac{\left(\sum_{1\le k\le n}\mathbb{P}[A_k]\right)^2}{\left(\sum_{1\le k,\,j\le n}\mathbb{P}\left[A_k\cap A_j\right]\right)}\ .$$

Question subsidiaire : pourquoi dit-on que c'est une réciproque au lemme de Borel-Cantelli ?

Exercice 4 [Lemme de Hoeffding]. Si Z est une variable aléatoire, on appelle log-*transformée de Laplace* de Z la fonction à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, définie pour $\lambda\in\mathbb{R}_+$ par

$$\psi_Z(\lambda)=\log\mathbb{E}\left[e^{\lambda Z}\right]\ .$$

(1) Montrer que si Y est une variable aléatoire centrée à valeurs dans l'intervalle $[a,b]$, alors pour tout $\lambda\in\mathbb{R}_+$,

$$\psi_Y(\lambda)\le\frac{(b-a)^2\lambda^2}{8}\ ;$$

on pourra par exemple dériver deux fois ψ_Y, et identifier, pour tout λ, cette dérivée seconde à la variance d'une variable aléatoire Z_λ.

(2) En déduire l'inégalité d'Hoeffding, qui est une inégalité de concentration de la la mesure (celle de la loi d'une somme de variables aléatoires indépendantes et bornées) :

Théorème 4. *Si $X_1,\dots,X_n$ sont des variables aléatoires, telles que X_i est à valeurs dans $[a_i,b_i]$, alors pour tout $\varepsilon>0$,*

$$\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i-\sum_{i=1}^n\mathbb{E}[X_i]\ge\varepsilon\right]\le\exp\left(-\frac{2\,\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^n(b_i-a_i)^2}\right)\ .$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}\left[\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]\right| \geq \varepsilon\right] \leq 2\,\exp\left(-\frac{2\,\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right) \ .$$

Intégration et Probabilités – TD 11
Indépendance, fonctions de répartition, lemme de Borel-Cantelli

Mise en jambes...

Exercice 1 [Loi du 0–1 de Kolmogorov]. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une suite de sous-tribus de $\mathcal{F}$. On note

$$\mathcal{G}_\infty = \bigcap_{n\geq 0} \sigma\left\{\mathcal{F}_k,\, k \geq n\right\}$$

la tribu des événements asymptotiques. On suppose que les $\mathcal{F}_n$ sont indépendantes. Alors $\mathcal{G}_\infty$ est $\mathbb{P}$-presque triviale, i.e.,

$$\forall A \in \mathcal{G}_\infty, \quad \mathbb{P}\left[A\right] \in \{0, 1\} \ .$$

En remarquant qu'une variable aléatoire $\mathcal{G}_\infty$-mesurable est $\mathbb{P}$-p.s. constante, montrer que si X_1,$X_2, \ldots$ est une suite de variables aléatoires réelles, de suite des moyennes mobiles associée

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\left(X_1 + \ldots + X_n\right) \ ,$$

alors les variables aléatoires $\liminf \bar{X}_n$ et $\limsup \bar{X}_n$ sont asymptotiques (i.e., $\mathcal{G}_\infty$-mesurables). En déduire que l'événement "la suite des moyennes mobiles converge" est lui-même asymptotique.

Exercice 2 [Inégalité de Khinchine]. Soit $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi de de Rademacher, *id est*,

$$\mathbb{P}\left[X_1 = 1\right] = \mathbb{P}\left[X_1 = -1\right] = \frac{1}{2} \ .$$

Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels. Montrer[6] que

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=1}^n a_i\, \sigma_i\right|\right] \geq \frac{1}{3}\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \ .$$

Indication : montrer que si X admet un moment d'ordre 4, alors

$$\mathbb{E}[|X|] \geq \frac{\left(\mathbb{E}[X^2]\right)^{3/2}}{\left(\mathbb{E}[X^4]\right)^{1/2}} \ .$$

Calculs de lois

Exercice 3. Soit X_1,$X_2, \ldots$,X_n des variables aléatoires réelles i.i.d. de loi de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue. Déterminer la loi de $Y = \min_k X_k$ et de $Z = \max_k X_k$.

Exercice 4. Soit X et Y deux variables aléatoires sur $\mathbb{R}_+$, indépendantes, de lois exponentielles, respectivement $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(\mu)$. Déterminer les lois de $U = X \wedge Y$, $V = X \vee Y$, et de (U,V). Indiquer comment retrouver les lois de U et de V à partir de celle calculée pour le

6. en fait, la constante proposée ici est sous-optimale : une preuve plus sophistiquée permettrait de remplacer le facteur $1/\sqrt{3}$ par $1/\sqrt{2}$

couple (U,V).

Exercice 5. Soit X et Y des variables aléatoires réelles. On note $U = \min(X,Y)$ et $V = \max(X,Y)$. Montrer (où l'on indice la fonction de répartition F d'une variable aléatoire par cette dernière) que $|F_X - F_Y| \leq F_U - F_V$, et qu'on a l'équivalence

$$\int_{\mathbb{R}} (F_U - F_V)\,\mathrm{d}m < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}\left[|X - Y|\right] < \infty\ .$$

Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors

$$\mathbb{E}\left[|X - Y|\right] < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}\left[|X|\right] + \mathbb{E}\left[|Y|\right] < \infty\ .$$

Exercice 6. Si (X,Y) est un couple de variables aléatoires réelles de loi de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur le plan, montrer que $Z = X/Y$ est une variable aléatoire, et calculer sa loi. Que constate-t-on lorsque X et Y sont indépendantes et suivent toutes deux une loi normale standard ? Concluez-en que si Z suit une loi de Cauchy, alors $1/Z$ et $(1+Z)/(1-Z)$ sont également de Cauchy.

Lemme de Borel-Cantelli

Exercice 7.

(1) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi μ. Calculer $\mathbb{P}[X = Y]$. Si X et Y sont réelles, montrer que $\mathbb{P}[X > Y] = \mathbb{P}[Y > X] > 0$ sauf dans un cas à déterminer.

(2) Soit $(X_n, n \geq 0)$ une suite de variables aléatoires réelles positives indépendantes, de même loi. Montrer que p.s. $\sum_{n\geq 0} X_n = \infty$, sauf dans un cas que l'on déterminera.

(3) Soit $(X_n, n \geq 0)$ une suite de variables aléatoires réelles positives indépendantes, de fonction de répartition F. Montrer que presque sûrement, $\max(X_0, X_1, \ldots, X_n) \to \ell$ quand $n \to \infty$, où $\ell = \sup\{t \in \mathbb{R} : F(t) < 1\}$.

Exercice 8. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires positives indépendantes de même loi. Montrer la dichotomie suivante : p.s.,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } E[X_1] < \infty\ , \\ \infty & \text{si } E[X_1] = \infty\ . \end{cases}$$

Exercice 9. Soit $\alpha > 0$, et soit $(Z_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi donnée par $\alpha > 0$, et

$$\mathbb{P}[Z_n = 1] = \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}[Z_n = 0] = 1 - \frac{1}{n^\alpha}.$$

Montrer que $Z_n \to 0$ dans L^1 (donc en $\mathbb{P}$-probabilité), mais pas nécessairement $\mathbb{P}$-p.s. :

$$\limsup_{n\to\infty} Z_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \leq 1\ , \\ 0 & \text{si } \alpha > 1\ . \end{cases}$$

Exercice 10. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables indépendantes, toutes de loi exponentielle de paramètre 1.

(1) Montrer que $\limsup_{n\to\infty} X_n / \ln n = 1$ p.s.
(2) On pose $Z_n = \max(X_1, \ldots, X_n) / \ln n$, montrer que $\liminf Z_n \geq 1$ p.s.
(3) Montrer que pour une suite $(n_k)_k$ bien choisie, $\limsup_{k\to\infty} Z_{n_k} \leq 1$ p.s. En déduire que $\limsup_{n\to\infty} Z_n \leq 1$ p.s., et enfin que $\lim_{n\to\infty} Z_n = 1$ p.s.

La cerise sur le gâteau...

Exercice 11. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. indépendantes de N. Comment étudieriez-vous

$$Z = \sum_{n=1}^{N} X_n \ ?$$

(Précisez l'espérance de Z, caractérisez sa loi, *etc.*)

Intégration et Probabilités – TD 12
Lois des grands nombres, convergence en loi, théorème central limite

Exercice 1. Donner des exemples de suites de variables $(X_n, n \geq 1)$ telles que la tribu asymptotique $\cap_{n\geq 1} \mathcal{G}_n$ n'est pas triviale (où $\mathcal{G}_n$ est la tribu engendrée par les variables $X_n, X_{n+1}, \ldots$).

Exercice 2 [Théorème de l'image continue]. Montrer que les convergences presque-sures, en probabilité, et en loi sont stables par images continues.

Exercice 3 [Lemme de Slutzky]. Soient $(Z_n)_{n\geq 1}$ et $(U_n)_{n\geq 1}$ deux suites de v.a. réelles, et Z, U deux v.a. réelles, toutes définies sur le même espace de probabilité, telles que

$$Z_n \rightsquigarrow Z \quad \text{et} \quad U_n \rightsquigarrow U \quad (\text{ou même } U_n \xrightarrow{\mathbb{P}} U).$$

Est-il vrai en général que $(Z_n, U_n) \rightsquigarrow (Z, U)$? Montrer que cela est vrai en revanche dans les cas suivants :

(1) $Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Z$ et $U_n \xrightarrow{\mathbb{P}} U$.
(2) pour tout n, Z_n et U_n sont indépendantes, et Z et U sont également indépendantes.
(3) U est p.s. constante ; pour traiter ce cas, on montrera d'abord que si $Z'_n \rightsquigarrow Z'$ et $Y'_n - Z'_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, alors $Y'_n \rightsquigarrow Z'$.

Remarquez que la convergence $(Z_n, U_n) \rightsquigarrow (Z, U)$ entraîne en particulier, par image continue, que $Z_n + U_n \rightsquigarrow Z + U$ et que $Z_n U_n \rightsquigarrow Z U$. Le point (3), dans ces deux cas particuliers, porte le nom de Lemme de Slutzky (voir les exercices 4, 10 et 11 de ce TD pour des applications).

Exercice 4. Soit une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geq 1}$ et X définies sur le même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$. On munit de dernier de deux probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$. Montrer que si $\mathbb{Q}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, et si (X_n) converge en $\mathbb{P}$-probabilité vers X, alors (X_n) converge également en $\mathbb{Q}$-probabilité vers X.

Exercice 5. Soit m une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. On définit pour tout $n \geq 1$ la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$

$$m_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} m\left([k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[\right) \, \delta_{k2^{-n}} \, .$$

Montrer que $(m_n, n \geq 1)$ converge en loi vers m.

Montrer que si $n\, p_n \to \lambda$, alors la suite des lois binômiales de paramètres (n, p_n) converge vers la loi de Poisson de paramètre λ. (Voir aussi l'exercice 1 du TD 9.)

Exercice 6. Soit $(Y_n, n \geq 0)$ une suite de variables aléatoires réelles suivant respectivement une loi gaussienne $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ avec $m_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n > 0$. Montrer que cette suite converge en loi vers une variable réelle Y si et seulement si les deux suites $(m_n, n \geq 0)$ et $(\sigma_n, n \geq 0)$ convergent (respectivement, vers m et σ), et identifier la loi limite.

Exercice 7. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. On pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. On suppose que la loi commune est la loi uniforme sur [0,1] (resp. la loi de Cauchy standard), montrer que la suite $n(1 - M_n)$ (resp. n/M_n) converge en loi quand

$n \to \infty$ vers une loi limite à préciser.

Exercice 8. Déterminer, sans calcul, la limite de $\mathbb{P}[S_n \leq n]$, où $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, et où les $(X_k, k \geq 1)$ sont i.i.d. selon une loi exponentielle de paramètre 1.

De la même manière, déterminer, sans calcul, la limite de

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \ .$$

Exercice 9. Donner explicitement une suite $(X_n, n \geq 1)$ convergeant en probabilité mais telle que

$$\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} X_n = \infty\right] = 1 \ .$$

Soit maintenant $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires i.i.d., de loi commune centrée et possédant un moment d'ordre 2. Montrer que

$$\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty\right] = 1 \ ,$$

et que $S_n/\sqrt{n}$ ne converge pas en probabilité. Montrer également que

$$\mathbb{P}\left[\{S_n > 0\} \cap \{S_{2n} < 0\}\right]$$

converge quand $n \to \infty$ vers une certaine limite à la calculer.

Exercice 10. Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi commune de Poisson de paramètre λ. Pour $\alpha \in]0,1[$ donné, construire une suite d'intervalles $I_n(X_1^n)$ tels que

$$\mathbb{P}\left[\lambda \in I_n(X_1^n)\right] \to 1 - \alpha \ .$$

(Vous avez construit une suite d'intervalles de confiance asymptotiquement de niveau α, bravo !)

Exercice 11. En Suisse, entre 1871 et 1900, sont nés 1.359.670 garçons et 1.286.086 filles. Qu'en pensez-vous[7] ?

7. à part, bien sûr, que vous n'en avez cure...