Lecture 2 — January 31, 2018 Lecture 2 — January 31, 2018

Calcul alternatif de l'espérance du maximum de N gaussiennes $\gtrsim \sqrt{2 \ln N}$
Auteur : Hassan Saber (non relu en détails par Gilles Stoltz ; la méthode semble peut-être plus directe)

Calculs préliminaires

* Une IPP,

$k \geqslant 0$, $a \geqslant 1$, alors :

$$\int_a^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^k}\,dx = \frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{a^{k+1}} - (k+1)\int_a^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{k+2}}\,dx$$

Puisque $\frac{1}{x^k} \geqslant \frac{1}{x^{k+2}}$ pour $x \geqslant 1$, il vient,

$$\frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{a^{k+1}} \geqslant \int_a^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^k}\,dx \geqslant \frac{1}{k+2}\,\frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{a^{k+1}} \quad \|$$

* Inégalités de convexité suivantes : $y \in (0,1)$

$$\ln(1-y) \leq -y$$

Pour $n \geqslant 1$, $\quad (1-y)^n = e^{n\ln(1-y)} \leq e^{-ny} \quad \|$

$$1 - e^{-ny} \geqslant ny - \frac{(ny)^2}{2} \quad \text{(par de convexité aussi)}$$

D'où $\quad 1-(1-y)^n \geqslant ny - \frac{(ny)^2}{2} \geqslant ny - (ny)^2 \quad \|$

$G_1, \dots G_n$ iid $\sim \mathcal{N}(0,1)$

$Z = \max_{i=1 \dots n} G_i$

* On a,

$$0 \geq E[Z \mathbb{1}_{Z \leq 0}] \geq E[G_1 \mathbb{1}_{Z \leq 0}] \geq E[G_1 \mathbb{1}_{G_1 \leq 0}] \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

* $$E[Z \mathbb{1}_{Z>0}] = \int_0^\infty \mathbb{P}(Z > u)\, du$$
$$= \int_0^\infty 1 - \mathbb{P}(Z \leq u)\, du$$
$$= \int_0^\infty 1 - \mathbb{P}(G_1 \leq u, \dots, G_n \leq u)\, du$$
$$= \int_0^\infty 1 - F(u)^n\, du$$

où F fonction de répartition de G_1, $F(u) = \int_{-\infty}^u \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dz$

On pose $G = 1 - F$.

Pour $a \geq 1$.

$$\int_a^{+\infty} 1 - F(u)^n\, du = \int_a^{+\infty} 1 - (1 - G(u))^n\, du \geq n \int_a^{+\infty} G(u)\, du - n^2 \int_a^{+\infty} G(u)^2\, du$$

Pour $u \geq a$, $G(u) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{2u}$ et $\int_a^{+\infty} G(u)\, du \geq \frac{1}{4\sqrt{2\pi} \times 3} \cdot \frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{a^2}$

$$G^2(u) \leq \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \frac{e^{-\frac{(\sqrt{2}u)^2}{2}}}{u^2}$$

et $$\int_a^\infty G^2(u)\, du \leq \frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int_{\sqrt{2}a}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{u^2}\, du \leq k \frac{e^{-\frac{(\sqrt{2}a)^2}{2}}}{a^3}$$

avec k constante > 0.

Ainsi il existe $k' > 0$ tel que pour $a \geq 1$

$$\int_a^{+\infty} 1 - F(u)^n \, du \geqslant k' \frac{n e^{-\frac{a^2}{2}}}{a^2} - k \, n^2 \frac{e^{-a^2}}{a^3}$$

Si on écrit $a = \sqrt{2 \ln(b)}$,

$$n e^{-\frac{a^2}{2}} = \frac{n}{b}$$

$$n^2 e^{-a^2} = \frac{n^2}{b^2}$$

Ainsi avec $b_n = n$ et $a_n = \sqrt{2 \ln(n)}$

$$\int_{a_n}^{+\infty} 1 - F(u)^n \, du \geqslant o\left(\sqrt{2 \ln(n)}\right)$$

et $\displaystyle\int_0^{a_n} 1 - F(u)^n \, du = a_n - \int_0^{a_n} F(u)^n \, du$

$$\int_0^{a_n} F(u)^n \, du = \int_0^1 F(u)^n du + \int_1^{a_n} (1 - G(u))^n \, du \leq o(1) + \int_1^{a_n} e^{-n G(u)} du$$

$$\int_1^{a_n} e^{-n G(u)} du \leq \int_1^{a_n} e^{-\frac{n e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\, u}} du$$

$$= a_n \int_{1/a_n}^{1} e^{-\frac{n \left(e^{-\frac{a_n^2}{2}}\right)^{u^2}}{\sqrt{2\pi}\, a_n u}} du$$

$$\leq a_n \int_0^1 e^{-n^{1-v^2}/\sqrt{2\pi}\,\sqrt{2\ln(n)}\,v}\,du$$

car $a_n = \sqrt{2\ln(n)}$ et $e^{-\frac{a_n^2}{2}} = n^{-1}$

Avec $f_n(v) = e^{-n^{1-v^2}/\sqrt{2\pi}\,\sqrt{2\ln(n)}\,v}$ pour $v \in (0,1)$

$0 \leq f_n(v) \leq 1$

$f_n(v) \xrightarrow[n\infty]{} 0$

d'où, par le TCD, $\int_0^1 f_n(v)\,dv = o(1)$

On a montré que

$$\int_0^{+\infty} 1 - F(v)^n\,dv \geqslant a_n + o(a_n) = \sqrt{2\ln(n)} + o\left(\sqrt{2\ln(n)}\right)$$

Ce qui donne

$$E[Z] \geqslant \sqrt{2\ln(n)} + o\left(\sqrt{2\ln(n)}\right)$$