Corrigé des exercices du cours #3.

Exercice 1.

⚠ J'avais changé l'énoncé en cours (puisque sinon il y avait une solution triviale, vue en cours, pour la seconde partie...) :

« Montrer que si l'on a prouvé une borne de la forme

$$\forall \delta > 0, \qquad \mathbb{P}\left\{ R_n \leqslant C\sqrt{n \ln 1/\delta} \right\} \geqslant 1-\delta$$

alors on a également

$$\mathbb{E}[R_n] \leqslant \square\, C\sqrt{n}$$

pour une constante numérique $\square$ à préciser. »

Et en fait, c'est encore mieux de prouver ce fait lorsque la borne est

$$\forall \delta > 0, \qquad \mathbb{P}\left\{ R_n \leq A + C\sqrt{n \ln 1/\delta} \right\} \geqslant 1-\delta.$$

↳ Correction aux pages suivantes (copie de R. Deswarte) ; la méthode est TB, les calculs me semblent ok (mais ils n'ont jamais été mon fort non plus !).

Desmarte
Raphaël
M2 PS

Exercice n°3

Ex. 1

Méthode rapide : $E[R_n] = \underbrace{E\left[\sum_{t=1}^{n} l_{I_t,t} - \sum_t \sum_j p_{jt} l_{j,t}\right]}_{0} + \underbrace{\sum_t \sum_j p_{jt} l_{j,t} - \min_k \sum_t l_{k,t}}_{\text{déterministe}}$,

qu'on peut borner avec les poids exponentiels en $O((M-m)\sqrt{n \ln K})$

Sinon :

* Si $R \geq 0$ p.s., $\int_0^{+\infty} P(R \geq t) = \int_0^{+\infty} E[\mathbb{1}_{R \geq t}]\, dt$

$= \int_0^{+\infty} \left(\int_\Omega \mathbb{1}_{R(\omega) \geq t}\, dP(\omega)\right) dt \underset{\text{Fubini-Tonelli}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_\Omega \Big(\underbrace{\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{R(\omega)\geq t}\, dt}_{R(\omega) \text{ car } R \geq 0}\Big) dP(\omega) = E[R]$

* Montrons que si $\forall \delta$, $P(R_n \leq C\sqrt{n \ln(\frac{1}{\delta})}) \geq 1-\delta$, alors $E[R_n] \leq C\sqrt{n}$.

Quitte à considérer $\mathbb{1}_{R_n \geq 0} R_n$ au lieu de R_n (vu que $E[\mathbb{1}_{R_n \geq 0} R_n] \geq E[R_n]$)

on peut supposer $R_n \geq 0$ p.s. $E[R_n] = \int_0^{+\infty} P(R_n \geq t)\, dt$

Les calculs n'ont jamais été mon fort, mais je me lance.

On pose $t = C\sqrt{n \underbrace{\ln(\tfrac{1}{\delta})}_{-\ln(\delta)}}$, i.e. $\delta = \exp\left(\frac{-t^2}{c^2 n}\right)$; d

$dt = C\sqrt{n} \times \frac{1}{2\sqrt{-\ln \delta} \times \delta}\, d\delta$

$E[R_n] = \int_0^1 \underbrace{P(R_n \geq C\sqrt{-n \ln \delta})}_{\leq \delta} \times \frac{C\sqrt{n}}{2\delta\sqrt{\ln(\frac{1}{\delta})}}\, d\delta$

$\leq \underbrace{\left(\int_0^1 \frac{1}{\ln(\frac{1}{\delta})}\, d\delta\right)}_{\infty} \times \frac{C}{2}\sqrt{n}$

Reste à borner : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\ln \delta}} \, d\delta = \int_{e^{-1}}^1 2 e^{-x^2} dx$ (avec $\delta = e^{-x^2}$, $d\delta = -2x e^{-x^2} dx$) $\leq 2 \times (1 - e^{-1}) < 2$.

Donc $E[R_n] \leq C\sqrt{n}$.

* Plus généralement, si on sait que $\forall \delta$, $P(R \geq A\sqrt{\ln(\frac{1}{\delta})} + B) \leq \delta$

on a : $P((R-B) \geq A\sqrt{\ln(\frac{1}{\delta})}) \leq \delta$ et par le raisonnement précédent,

$E[R-B] \leq A$ d'où $E[R] \leq A+B$.

Appliqué à : $P(R_n \leq \underbrace{(M-m)\sqrt{\frac{n}{2}}}_{A}\sqrt{\ln(\frac{1}{\delta_n})} + \underbrace{(M-m)\sqrt{n \ln K} + (M-m)(2+\frac{4}{3}\ln K)}_{B}) \geq 1-\delta_n$,

on a : $E[R_n] \leq (M-m)\sqrt{n\ln K}\underbrace{\left(1+\frac{1}{2\ln K}\right)}_{\leq 2 \text{ pour } K \geq 3} + \underbrace{(M-m)\left(2+\frac{4}{3}\ln K\right)}_{\text{indépendant de } n}$.

Dominik Rothenhäusler (constant improved)

$$\mathbb{P}[R_n \leq C\sqrt{n\ln(1/\delta)}] \geq 1-\delta \;\forall\delta \in (0,1) \iff \mathbb{P}[R_n > \epsilon] < \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{nC^2}\right) \;\forall \epsilon > 0 \quad (1)$$

by simply setting $\epsilon = C\sqrt{n\ln(1/\delta)}$.

$$\mathbb{E}[R_n] \leq \int_0^\infty \mathbb{P}[R_n > \epsilon]d\epsilon \leq \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{nC^2}\right)d\epsilon = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sqrt{\frac{nC^2}{2}} = C\frac{\sqrt{\pi n}}{2} \quad (2)$$

This case extends to the more general case by considering $R_n - A$ instead of R_n. I used $\int_0^\infty \mathbb{P}[R_n > \epsilon]d\epsilon = \int_0^\infty \mathbb{P}[R_n \geq \epsilon]d\epsilon$.

__Exercice 2.__ $\rightarrow$ La question 2 était très difficile (et personne ne l'a résolue correctement...)

1/ Doob : Si (M_n) est une sous-martingale positive, alors

$$\forall n, \ \forall \alpha > 0 \qquad \mathbb{P}\left\{ \max_{t \leq n} M_t \geq \alpha \right\} \leq \mathbb{E}[M_n] / \alpha$$

On note $\displaystyle S_n = \sum_{t=1}^{n} X_t - \sum_{t=1}^{n} \mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}]$

(S_n) est une martingale et exp est convexe donc (e^{S_n}) est une sous-martingale, par ailleurs positive. (Vous avez vu ce résultat lors de votre cours sur les martingales en M1 : on le prouve par Jensen conditionnel.)

C'est à (e^{S_n}) qu'on applique Doob :

$$\mathbb{P}\left\{ \max_{t \leq m} S_t > \varepsilon \right\} \underset{\substack{\text{exp} \\ \text{croissante} / \\ \forall s>0}}{=} \mathbb{P}\left\{ \max_{t \leq n} e^{sS_t} > e^{s\varepsilon} \right\} \underset{\text{Doob}}{\leq} e^{-s\varepsilon}\, \mathbb{E}\left[e^{sS_n}\right]$$

$$\underset{\substack{\text{cf. preuve} \\ \text{de Hoeffding-} \\ \text{Azuma vue en cours}}}{\leq} \exp\left(- \frac{2\,\varepsilon^2}{\sum_{t=1}^{n} (b_t - a_t)^2} \right)$$

d'où le résultat.

NB1 : Appliquer Doob à $(S_n^+) = (\max\{S_n, 0\})$ ne suffisait pas : le résultat que l'on veut prouver ici est plus fort que l'inégalité de Hoeffding-Azuma vue en cours ! Si donc il ne suffisait pas en cours de recourir à S_n^+, ici non plus a fortiori...

NB2 : Avec une borne d'union :

$$\forall \delta, \ \forall t, \qquad \mathbb{P}\left\{ S_t \leq \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{s=1}^{t} (b_t - a_t)^2 \ln n/\delta} \right\} \geq 1 - \delta/n$$

et donc $$\mathbb{P}\left\{ \forall t \leq n, \quad S_t \leq \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{s=1}^{t} (b_t - a_t)^2 \ln \frac{n}{\delta}} \right\} \geq 1 - \delta$$

et en particulier $$\mathbb{P}\left\{ \max_{t \leq n} S_t \leq \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{n} (b_t - a_t)^2 \ln n/\delta} \right\} \geq 1 - \delta$$

mais il y a un « $\log n$ en trop », ce qui serait grave pour la suite !

2/ On écrit
$$R_n = \sum_{t=1}^{n} \ell_{I_t,t} - \min_j \sum_{t=1}^{n} \ell_{jt}$$
$$= \underbrace{\sum_{t=1}^{n} \ell_{I_t,t} - \sum_{t=1}^{n} \sum_k p_{kt}\,\ell_{kt}}_{= S_n} + \underbrace{\sum_{t=1}^{n} \sum_k p_{kt}\,\ell_{kt} - \min_j \sum_{t=1}^{n} \ell_{jt}}_{= R_n^{\text{gén}}}$$

qui est une martingale

Le vrai travail est ici !

peut être $\leqslant (M-m)\sqrt{n \ln K} + (M-m)\left(2 + \frac{4}{3}\ln K\right)$

$= o\left(\sqrt{n \ln\ln n}\right)$

Pour prouver l'assertion, il faut et il suffit donc de montrer que
$$\limsup \frac{S_n}{(M-m)\sqrt{n \ln\ln n}} \leqslant C \quad \text{p.s.}$$

↳ il ne reste qu'un travail purement probabiliste.

Commençons par dresser la liste des deux erreurs rencontrées (hélas, tout le monde a commis l'une ou l'autre !) :

<u>ERREUR #1</u> : tenter de contrôler $\max_{t=1..2^r} S_{2^r+t}$

$(S_{2^r+t})_{t=1..2^r}$ est bien une martingale, MAIS son premier terme S_{2^r+1} est "gros", il correspond à $b_1 - a_1$ de l'ordre de 2^r. La borne que l'on obtiendrait serait donc au moins de l'ordre de 2^r, ce qui est bien trop gros ! L'erreur ici consistait à se focaliser sur les $b_j - a_j \leqslant M-m$ pour $j \geqslant 2$...

ERREUR #2 : Contrôler $\max_{t \leq 2^r} S_t$ par quelque chose de l'ordre de $\sqrt{2^r}$ (ça, c'est ok)

mais ensuite être bloqué pour relier

$\frac{S_t}{\sqrt{t}}$ à $\frac{S_t}{\sqrt{2^r}}$ car les petits t ne sont pas commensurables à 2^r lorsque $r \to +\infty$.

Nous verrons ci-dessous comment assurer toujours une commensurabilité à un facteur 2 près.

SOLUTION : $\forall r \in \mathbb{N}^*$, cf. question 1/

$$\mathbb{P}\left\{ \max_{t \in [2^r+1,\, 2^{r+1}]} \sum_{s=2^r+1}^{t} \ell_{I_s, s} - \sum_{s=2^r+1}^{t} \sum_j p_{js} \ell_{js} > (M-m)\sqrt{2^r/2 \ln \frac{1}{\delta_r}} \right\} \leq \delta_r = 1/r^2$$

Borel-Cantelli : on note R la variable aléatoire telle que

$$\forall r \geq R, \quad \max_{t \in [2^r+1,\, 2^{r+1}]} \sum_{s=2^r+1}^{t} \left(\ell_{I_s, s} - \sum_k p_{ks} \ell_{ks} \right) \leq (M-m)\sqrt{2^r \ln r} \qquad (*)$$

On a : $R < +\infty$ ps.

Puis

$$S_n \leq \underbrace{\left(2^R + 1\right)(M-m)}_{\text{majoration triviale sur les régimes } r < R} + \underbrace{\sum_{r=R+1}^{r_n} (M-m)\sqrt{2^r \ln r}}_{\text{majoration } (*) \text{ pour } r \geq R}$$

où $r_n = \lceil \log_2 n \rceil - 1$

sachant que n est dans le régime r_n tel que

$$2^{r_n} + 1 \leq n \leq 2^{r_n+1}$$

soit $r_n = \lceil \log_2 n \rceil - 1$

$$S_n \leq (M-m)\underbrace{2^R+1}_{<+\infty \text{ ps}} + \sum_{r \leq r_n} (M-m)\sqrt{2^r}\sqrt{\ln r_n}$$

et $\displaystyle\sum_{r \leq r_n} \sqrt{2^r} \leq \frac{(\sqrt{2})^{r_n+1}}{\sqrt{2}-1}$

et $2^{r_n+1} \leq 2n$ par déf de r_n

D'où $$S_n \leq (M-m)\underbrace{(2^R+1)}_{<+\infty \text{ ps}} + \frac{2(M-m)}{\sqrt{2}-1}\sqrt{n}\underbrace{\sqrt{\ln r_n}}_{\sim \sqrt{\ln \ln n}}$$ car $r_n \sim \dfrac{\ln n}{\ln(2)}$

Ainsi, $$\limsup \frac{S_n}{(M-m)\sqrt{n \ln\ln n}} \leq \frac{2}{\sqrt{2}-1} \text{ ps.} \qquad (**)$$

⚠ Mais mes calculs sont à vérifier !

3/ Loi du logarithme itéré pour des variables aléatoires $Z_1 \dots Z_n \dots$ iid d'espérance 0 et de variance 1 :

$$\limsup \frac{Z_1 + \dots Z_n}{\sqrt{n \ln\ln n}} = \sqrt{2} \text{ ps}$$

(Note : $\operatorname{Var} Z_1 \leq \frac{(M-m)^2}{4}$ donc $M-m \geq 2$, p.ex. $M=1$ et $m=-1$ pour $Z = \pm 1$ avec proba $1/2$)

Appliquer la technique précédente à $S_n = Z_1 + \dots Z_n$ (avec $Z_j = \pm 1$ avec proba $1/2$) donne seulement

$$\limsup \frac{Z_1 + \dots Z_n}{\sqrt{n \ln\ln n}} \leq \underbrace{\frac{2}{\sqrt{2}-1}}_{= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}} \text{ ps}$$

le contrôle précédent doit pouvoir être amélioré

NB : Sous-optimalité de (**) due à la technique de preuve par H-Azuma 4 régimes, pas au fait que iid vs. martingales...