MAO – 14 SEPTEMBRE 2004

GILLES STOLTZ ET ISMAËL CASTILLO

Résumé. Les exercices 1 et 2 sont absolument obligatoires, et il serait bon que vous écriviez au moins quelques programmes pour les exercices 3 et 4. Puisqu'il s'agit d'un examen oral, nous vous interrogerons sur vos programmes et vous pourrez les corriger avec notre aide lors du passage. Par ailleurs, vous devrez exposer au tableau les réponses aux questions théoriques qui suivent (ne les rédigez donc pas nécessairement proprement, ce qui compte, c'est leur exposé oral). En cas de besoin majeur, vous pouvez requérir l'intervention du jury pendant votre préparation.

La durée de la préparation est d'une heure, suivie d'une heure de passage. Je vous rappelle que comme tout examen public, les tentatives de triches sont passibles de 5 ans d'interdiction d'examens et de concours de la fonction publique (y compris l'agrégation, le CAPES et tout DEA). Le seul document autorisé est le résumé que vous aviez pu écrire sur un recto d'une feuille A4 pour la session de juin.

Exercice 1 [Simulation de lois binômiales]. Ecrire une fonction `Bin(n,m,p)` qui prend en argument 2 entiers `n`, `m` et un réel `p` de [0,1], et qui renvoie un `n`-échantillon de variables aléatoires de loi binômiale de paramètres `m` et `p`. Contrainte : il est interdit d'utiliser une quelconque instruction `if` ou une boucle `for` (ni de faire appel à StixBox). Et la solution doit tenir en une ligne...

Question subsidiaire : comment s'appelle précisément la fonction StixBox que nous vous interdisons de considérer ?

Exercice 2 [Méthode d'inversion]. Rappeler ce qu'est la méthode dite d'inversion pour simuler des lois. L'appliquer pour tirer un n-échantillon de loi exponentielle de paramètre λ.

Exercice 3 [Calculs de π]. On veut calculer une approximation de π par méthodes de Monte-Carlo.

(1) Etant donnée une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, intégrable, rappeler comment calculer une estimation de son intégrale sur [0,1], à l'aide d'une suite auxiliaire de variables aléatoires i.i.d. selon une loi uniforme sur [0,1], notée $U_1, U_2, \ldots$.

(2) Préciser les garanties théoriques que l'on *peut* avoir sur le résultat du calcul. Plus précisément, je veux deux types de garanties non-asymptotiques, une garantie faisant intervenir un terme de variance et une autre ne dépendant que des bornes $\mathbb{L}^\infty$ des variables aléatoires considérées. Pour chacune, vous préciserez bien les hypothèses d'application.

(3) L'élève cosinus propose la fonction

$$f(x) = 2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, .$$

En fonction de votre réponse à la question précédente, ce choix vous semble-t-il bien adapté ? (Rappel : la primitive de f est $2\mathrm{Arc}\sin$.)

(4) Que dire de l'élève lambda qui propose quant à lui

$$g(x) = 4\sqrt{1-x^2}\ ?$$

(5) Fixez-vous un nombre N de variables uniformes auxquelles vous avez accès pour que les approximations soient toutes deux, si cela est possible, garanties à $\varepsilon = 10^{-2}$ près avec probabilité $1 - \delta = 95\%$, et écrivez un fichier script [1] réalisant deux séries de 10 approximations, la première série avec f, l'autre avec g.

(6) Indiquez pour chaque série l'écart de la plus mauvaise approximation à π et donnez en une phrase la morale de cet exercice (qui de f et g est la meilleure en théorie et qui est celle en pratique, et surtout pourquoi)...

Exercice 4 [Chaîne d'Ehrenfest modifiée]. d balles numérotées de 1 à d sont réparties dans deux boîtes B_1 et B_2. On choisit un nombre i au hasard entre 1 et d, puis on tire au hasard (avec équiprobabilité) l'indice $j \in \{1,2\}$ de la la boîte dans laquelle on place la balle numéro i. On note X_n le nombre de balles dans B_1 après n tirages. La suite $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov.

(1) Précisez sa matrice de transition, et montrez que la chaîne est irréductible et apériodique. Avez-vous une idée intuitive de la loi invariante de cette chaîne ?

(2) Nous allons vérifier votre intuition avec Matlab. On suppose que $X_0 = 0$. Ecrivez une fonction de `n`, `d` et `N` qui simule `N` trajectoires $(X_1, \ldots, X_n)$. (Il serait bon que cette fonction ne contienne qu'une et une seule boucle `for`.) Simulez des réalisations de $(X_1, \ldots, X_n)$ et tracez-les.

(3) Rappelez pourquoi la suite des X_n converge en loi vers la loi limite. Pour N et n grands, réalisez N simulations de X_n, et comparez l'histogramme des réalisations à celui de votre loi candidate. Aviez-vous raison ?

(4) Retrouvez par le calcul cette loi limite. A cet effet, ecrivez une fonction qui construit la matrice de transition de la chaîne, pour le paramètre d qui lui est donné en argument. Quelle est ensuite l'opération d'algèbre linéaire qui vous donne la loi invariante ? Effectuez.

1. et non une fonction !