

## TP4: CHAÎNES DE MARKOV

### 1. POUR SE METTRE EN JAMBES...

**Exercice 1 [Chaîne d'Ehrenfest modifiée].**  $d$  balles numérotées de 1 à  $d$  sont réparties dans deux boîtes  $B_1$  et  $B_2$ . On choisit un nombre  $i$  au hasard entre 1 et  $d$ , puis on tire au hasard (avec équiprobabilité) l'indice  $j \in \{1,2\}$  de la boîte dans laquelle on place la balle numéro  $i$ . On note  $X_n$  le nombre de balles dans  $B_1$  après  $n$  tirages. La suite  $(X_n, n \geq 0)$  est une chaîne de Markov.

- (1) Précisez sa matrice de transition, et montrez que la chaîne est irréductible et apériodique. Avez-vous une idée intuitive de la loi invariante de cette chaîne?
- (2) Nous allons vérifier votre intuition avec Matlab. On suppose que  $X_0 = 0$ . Ecrivez une fonction de  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{N}$  qui simule  $\mathbf{N}$  trajectoires  $(X_1, \dots, X_n)$ . (Il serait bon que cette fonction ne contienne qu'une et une seule boucle `for`.) Simulez des réalisations de  $(X_1, \dots, X_n)$  et tracez-les.
- (3) Rappelez pourquoi la suite des  $X_n$  converge en loi vers la loi limite. Pour  $N$  et  $n$  grands, réalisez  $N$  simulations de  $X_n$ , et comparez l'histogramme des réalisations à celui de votre loi candidate. Avez-vous raison?
- (4) Retrouvez par le calcul cette loi limite. A cet effet, écrivez une fonction qui construit la matrice de transition de la chaîne, pour le paramètre  $d$  qui lui est donné en argument. Quelle est ensuite l'opération d'algèbre linéaire qui vous donne la loi invariante? Effectuez.

**Exercice 2 [Bruit qui court].** Une personne pose une question dont la réponse ne peut être que « oui » ou « non ». Cette réponse est donnée à travers  $n$  intermédiaires. Chaque intermédiaire a la même probabilité  $p \in [0,1]$  de transmettre le message correctement.

- (1) Modélisez la transmission du message par une chaîne de Markov homogène  $(X_1, X_2, \dots)$ , dont on précisera la matrice de transition  $P$ . Donnez les caractéristiques de cette chaîne: classes de récurrence, périodicité le cas échéant. Qu'en déduisez-vous en ce qui concerne une mesure invariante associée à la chaîne?
- (2) Ecrivez une fonction (de  $n$ ) simulant une trajectoire  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  de la chaîne.
- (3) Appliquez les théorèmes de type ergodique pour les chaînes de Markov à la suite des distributions empiriques des états,

$$\hat{\pi}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{X_j} .$$

Illustrez graphiquement selon votre convenance.

- (4) Que peut-on dire alors de la loi de  $X_n$ ? Illustrez cela graphiquement ou numériquement. Puis, essayez de voir quelle est la vitesse de convergence; à cet effet, faites varier  $p$ , et représentez le nombre d'itérations nécessaires pour chaque  $p$  pour que Matlab ne distingue plus la loi de  $X_n$  (donnée par  $P^n$ ) de sa loi limite. Arriverez-vous à vérifier

l'affirmation du théorème SLEM<sup>1</sup> selon lequel cette convergence a lieu avec une vitesse  $|1 - 2p|^n$  ?

**Exercice 3.** Un gène est composé de  $d$  allèles dont  $m$  sont mutants et  $d - m$  sont normaux. Avant la division de la cellule, le gène se duplique. Le gène d'une des deux cellules sœurs se compose alors de  $d$  allèles pris au hasard parmi les  $2m$  allèles mutants et les  $2(d - m)$  allèles normaux. On suit une filiation donnée. Soit  $X_n$  le nombre d'allèles mutants du gène de cette filiation à la  $n$ -ième génération. On forme ainsi une chaîne de Markov. Ecrivez la la matrice de transition de la chaîne pour  $d = 3$ .

Comment appelle les états 0 et 3? On note  $T_0$  (respectivement  $T_3$ ) les temps d'atteinte de ces états. Vérifiez numériquement les résultats suivants :

$$\mathbb{P}_1(T_0 < +\infty) = 2/3, \quad \mathbb{P}_1(T_3 < +\infty) = 1/3 ,$$

où  $\mathbb{P}_1$  indique que  $X_0$  est constant égal à 1. (A quel théorème faites-vous appel? Comment faut-il procéder? Rappelez-vous le TP2...)

On considère maintenant  $T_P = \min(T_0, T_3)$  le temps d'atteinte d'un puits (d'un état absorbant). Essayez d'estimer  $\mathbb{E}[T_P]$ , en utilisant la loi des grands nombres pour des variables aléatoires positives d'espérance non nécessairement finie<sup>2</sup>. Ce résultat était-il prévisible?

## 2. EXERCICES PLUS AVANCÉS

**Exercice 4 [Ruine du joueur].** Deux joueurs  $A$  et  $B$  jouent à pile ou face. Lorsque la pièce (non biaisée!) tombe sur pile,  $A$  donne 1 euro à  $B$ ; pour face, c'est  $B$  qui donne 1 euro à  $A$ .  $A$  et  $B$  démarrent avec chacun  $a$  et  $b$  euros. Soit  $X_n$  la fortune de  $A$  au temps  $n$ . Ainsi,  $X_0 = a$ . Le jeu s'arrête lorsque  $A$  est ruiné ( $X_n = 0$  pour un certain  $n$ ) ou lorsque  $B$  est ruiné ( $X_n = a + b$  pour un certain  $n$ ). Modéliser ce jeu par une chaîne de Markov homogène. Trouver la probabilité que  $A$  gagne, d'abord à l'aide de Matlab, puis par le calcul (utilisez à cet effet la propriété de Markov faible).

**Exercice 5 [Chaîne de naissance et mort].** Une chaîne de naissance et de mort est une chaîne de Markov  $(X_n)_{n \geq 0}$  sur l'espace d'état formé par les entiers naturels,  $\mathbb{N}$ , de transitions paramétrées par un réel  $p \in ]0, 1[$  ( $m$  désigne ci-dessous un élément de  $\mathbb{N}^*$ ):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0] &= p, \\ \mathbb{P}[X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0] &= 1 - p, \\ \mathbb{P}[X_{n+1} = m - 1 \mid X_n = m] &= p, \\ \mathbb{P}[X_{n+1} = m + 1 \mid X_n = m] &= 1 - p. \end{aligned}$$

On montre que cette chaîne est irréductible, apériodique, et récurrente positive si  $p < 1/2$ , récurrente nulle si  $p = 1/2$  et transiente pour  $p > 1/2$ . Ecrivez une fonction qui simule cette chaîne (les paramètres de cette fonction sont  $p$  et la valeur initiale de la chaîne). Pour vous familiariser avec l'évolution de cette chaîne, tracez des trajectoires pour  $p = 1/2$ ,  $p < 1/2$ ,

---

1. *Second Largest Eigenvalue Modulus*

2. D'ailleurs, si vous ne connaissiez pas ce théorème, comment le prouveriez-vous en deux lignes, à partir de la loi des grands nombres usuelle?

$p > 1/2$ . Ensuite, simulez des réalisations de la suite suivante :

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \mathbb{I}_{X_t=3} \right)_{n \geq 1} .$$

Quels sont les comportements en fonction de  $p$ ? Vous souvenez-vous des théorèmes qui justifient ces comportements? Dans les cas où la suite converge, vers quoi converge-t-elle?

On se place désormais dans le cas récurrent positif (prenez par exemple  $p = 1/4$ ). Il existe une unique probabilité invariante. Essayez de calculer une autre approximation de la valeur de la probabilité invariante en 3 (pensez à des temps de retour). Comparez avec la valeur précédente.

**Exercice 6 [Protocole ALOHA stabilisé].** Un grand nombre d'utilisateurs partage un même canal de transmission, chacun d'entre eux émettant aléatoirement, et indépendamment des autres, des informations (selon, par exemple, une loi commune, de Bernoulli, de paramètre  $p$  très petit). Ainsi, on peut approximer<sup>3</sup> l'arrivée de nouveaux messages par une loi de Poisson  $\mu$ , de paramètre  $\lambda > 0$ . Le problème est que deux messages ne peuvent pas passer à la fois dans le canal. Lorsque deux messages ou plus essaient de passer en même temps, il se produit des interférences et on les stocke temporairement dans une mémoire tampon. Cette mémoire est gérée de la manière suivante. A l'instant suivant de fonctionnement de la chaîne, chacun des messages du tampon est réémis ou non avec une probabilité  $\nu > 0$  fixe (de sorte que le nombre total de messages réémis en provenance du tampon suit une loi binômiale de paramètres la taille du tampon et  $\nu$ ). S'il n'y a pas de nouveau message arrivant, et qu'un seul des messages du tampon demande à être réémis, alors cela est possible, et le tampon se vide du message considéré. Dans tous les autres cas, *id est* arrivée d'au moins un message nouveau et tentative de réémission d'au moins un message du tampon, tentative de réémission d'au moins deux messages du tampon, ou arrivée d'au moins deux messages, le tampon non seulement ne se réduit pas, mais dans certains de ces cas, augmente.

Plus précisément, on note  $X_n$  le nombre de messages dans le tampon à l'instant (discrétisé)  $n$ . On part de  $X_0 = 0$ . On a formé ainsi une chaîne de Markov, de matrice de transition  $P$  donnée par  $P(0, \cdot) = \mu$ , et, pour  $i \geq 1$ ,

$$P(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leq i - 2 \\ \mu(0)b_i(1) & \text{si } j = i - 1 \\ (1 - b_i(1))\mu(0) + b_i(0)\mu(1) & \text{si } j = i \\ (1 - b_i(0))\mu(1) & \text{si } j = i + 1 \\ \mu(j - i) & \text{si } j = i + 2, \end{cases}$$

où  $b_i(k)$  désigne la probabilité qu'une variable aléatoire de loi binômiale de paramètres  $i$  et  $\nu$  prenne la valeur  $k$ .

Cette chaîne est irréductible, apériodique. Malheureusement, elle n'est pas récurrente positive : elle est ou transiente, ou récurrente nulle. Dit autrement, il n'existe pas de probabilité invariante. On appelle ce cas le cas instable.

Une méthode de « stabilisation » (*id est*, une méthode pour rendre la chaîne récurrente positive) repose sur le lemme de Pakes. Elle marche pour  $\mu(0) > \mu(1)$ , c'est-à-dire pour un paramètre  $\lambda < e^{-1}$ . Elle consiste à changer la politique de réémission du tampon, en faisant

---

3. Souvenez-vous des conditions d'approximation d'une loi binômiale par une loi de Poisson

dépendre  $\nu$  de la taille du tampon. Pour une taille  $i \geq 1$ , chacun des éléments du tampon sera réémis indépendamment des autres avec probabilité  $\nu(i)$ , où

$$\nu(i) = \frac{\mu(0) - \mu(1)}{i\mu(0) - \mu(1)} .$$

Ecrivez la nouvelle matrice de transition. On montre que la chaîne ainsi obtenue est toujours homogène, irréductible, apériodique, et cette fois-ci, récurrente positive.

Voici votre mission maintenant. Simulez des trajectoires de chacune des deux versions, et comparez-les. Vous pouvez en particulier tracer l'histogramme de la taille du tampon.

La référence pour cet exercice est *Markov chains, Gibbs fields, Monte-Carlo simulations and queues* de Pierre Bremaud, chez Springer. C'est « la » référence pour illustrer vos leçons sur les chaînes de Markov. De nombreux modèles intéressants et originaux sont proposés. Tous sont simples d'approche, et se prêtent volontiers à une étude par simulation sous Matlab. En plus, il y a un cours très complet sur les chaînes de Markov... Une bible!