TP5 : TESTS STATISTIQUES

Avertissement

Ce TP comporte de nombreuses questions théoriques, pas toujours aisées à résoudre. Je vous demanderais de bien vouloir essayer de les traiter en dehors du cours, afin de pouvoir vous concentrer sur les simulations demandées. Ces dernières sont peu nombreuses (tant et si bien qu'elles sont signalées par les symboles ★♡✠) mais assez longues à réaliser. Elles requièrent en outre un temps assez important de réflexion préparatoire.

Exercice 1 [Etude de la robustesse[1] d'un test]. Soit une suite d'observations $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, i.i.d. de loi μ. On note S^2 la variance empirique (version biaisée),

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \left(X_t - \bar{X}_n \right)^2 ,$$

où $\bar{X}_n$ désigne la moyenne empirique d'ordre n,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} X_t .$$

(1) On suppose que μ est une loi gaussienne, de moyenne m et de variance σ^2. Quelle est la loi de S^2 ? Indication : appliquer le théorème de Student à nS^2/σ^2.

(2) On pose $H_0 : \sigma^2 \leq 1$. Construire un test de niveau (exactement) α.

On se demande maintenant si le test construit précédemment s'étend à des lois non-gaussiennes, *id est*, si lorsque μ n'est plus gaussienne, le test précédent (avec la même statistique de test, avec le même choix pour la zone de rejet) est toujours, au moins asymptotiquement, de niveau α. On admet pour l'instant les résultats suivants :

- si $\chi^2_{n-1,\alpha}$ désigne le α-quantile de la loi du χ^2 à $n-1$ degrés de liberté, alors

$$\frac{\chi^2_{n-1,\alpha} - (n-1)}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}} \longrightarrow u_\alpha ,$$

  où u_α désigne le α-quantile de la loi gaussienne standard ;
- on a la convergence en loi suivante :

$$\sqrt{n} \left(\frac{S^2}{\sigma^2} - 1 \right) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \kappa + 2) ,$$

  où κ désigne la kurtosis de μ.

1. La robustesse d'un test est définie comme la non-sensibilité de la procédure de test à la loi des observations. Le test asymptotique sur la moyenne fondé sur le TCL est ainsi robuste sur l'ensemble des lois admettant un moment d'ordre deux.

On rappelle que si X suit la loi μ, alors la kurtosis κ de μ est définie comme

$$\kappa = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 \ ,$$

avec, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\mu_k = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^k\right] \ .$$

(Notez qu'en particulier, $\mu_2 = \sigma^2$ est la variance de μ.)

(3) Prouvez qu'asymptotiquement, le test précédent est de niveau sous μ égal à

$$1 - \Phi\left(\frac{u_\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa+2}}\right) \ ,$$

où Φ est la fonction de répartition [2] de la loi gaussienne ; on a donc prouvé la non-robustesse contre une modification de la valeur de la kurtosis.

★♡✠ (4) Mettons en évidence cette non-robustesse par voie de simulations. Pour $n = 20$, estimez [3] par méthode de Monte–Carlo le niveau réel du test proposé à la question (2), pour $\alpha = 5\%$ et μ donné d'une part par une loi de Laplace, et d'autre part, par un mélange de gaussiennes, $0{,}95\mathcal{N}(0,1) + 0{,}05\mathcal{N}(0,9)$ par exemple.

(5) Il faut encore prouver les deux résultats que nous avions admis. Ils découlent tous deux de la convergence en loi suivante, que je vous invite à vérifier et à prouver (je note m l'espérance de μ) :

$$\sqrt{n}\left(S^2 - \sigma^2\right) = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(X_t - m)^2 - \sigma^2\right) - \sqrt{n}\left(\bar{X}_n - m\right)^2 \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \mu_4 - \mu_2^2) \ .$$

Seule la convergence des quantiles pose désormais encore problème. Notez que la convergence en loi ci-dessus entraîne en particulier que si $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ est une suite de variables aléatoires telles que Z_k ait pour loi celle du χ^2 à k degrés de liberté, alors

$$\frac{Z_{n-1} - n}{\sqrt{n}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,2) \ .$$

Concluez alors aux résultat de convergence des quantiles.

Exercice 2 [Test du χ^2 avec estimation de paramètres]. Soit une suite $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de mesures (avec $n \geq 30$), dont on veut tester si elles sont la réalisation d'une suite de variables i.i.d. de loi commune une loi de Poisson.

Un étudiant en statistique propose la mise en œuvre suivante d'un test du χ^2 avec estimation de paramètres :

> J'ai bien $n \geq 30$. J'estime ensuite le paramètre de la loi de Poisson potentielle, par $\hat{\lambda} = \bar{X}_n$, la moyenne empirique de mon échantillon. J'effectue ensuite un regroupement en classes, de sorte que la probabilité p_i de chaque classe vérifie bien $n\,p_i \geq 5$ (où p_i est donnée par la probabilité théorique qu'une loi de Poisson de paramètre $\hat{\lambda}$ affecte à la i-ème classe). Je calcule ensuite la statistique de Pearson, et je regarde si je suis dans la zone de rejet.

---

2. En particulier, on a donc $1 - \Phi(u_\alpha) = \alpha$.

3. Indication : on trouve un niveau de l'ordre de 12 %. Question subsidaire : ceci est-il loin du niveau asymptotique tel que calculé à la question (3) ?

Le maître Jedi lui objecte cependant :

> La méthodologie semble bonne, mais tu n'es pas dans le cadre du théorème pour les tests du χ^2 avec estimations de paramètre. Celui-ci se situe en effet dans le cas d'une loi multinômiale, dont on estime le paramètre. Ceci suppose donc que tu regroupes d'abord tes observations dans des classes et que tu fasses ton estimation de paramètre ensuite, en choisissant l'estimateur du maximum de vraisemblance. Mais cette estimation doit porter sur le paramètre de la loi multinômiale ainsi obtenue, et non sur le paramètre de la loi de Poisson de départ.
>
> Je ne connais aucun théorème prouvant que ce que tu proposes est une bonne manière de procéder, *id est*, conduit bien à un test asymptotiquement de niveau α. Ce résultat me semble pourtant bien raisonnable, et je te suggère de justifier ta méthode par simulations.
>
> Remarque que c'est également par simulations que l'on a donné les critères pratiques de mise en œuvre, $n \geq 30$ et tous les $n\,p_i \geq 5$. Ici, Matlab te sera d'une grande aide, petit scarabée. Que la force soit avec toi.

Méditez les paroles du maître Jedi et lancez-vous [4] ! Un conseil : exercez-vous d'abord sur papier... Question supplémentaire : profitez-en pour estimer la puissance de ce test, par exemple contre la loi uniforme sur les entiers entre 0 et 10. ★♡✠

Exercice 3 [Le paradoxe de la construction séquentielle d'intervalles de confiance]. Je dispose de deux énoncés, en anglais. Les décrypter, les critiquer, et trouver des idées à programmer ou à simuler vous préparera au texte du troisième oral d'agrégation. Le texte que je propose est court, vous devriez en avoir pour une heure et demie au total.

4. Paramètres suggérés : $n = 60$ observations tirées selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4$